6 класс **Заключительный тур** **2022-2023**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (13 *баллов*) Какое наименьшее количество участников могло быть в школьном драмкружке, если пятиклассников в нём было больше 25%, но меньше 35%, шестиклассников больше 30%, но меньше 40%, а семиклассников больше 35%, но меньше 45% (участников из других классов не было).

Ответ: 11. Пятиклассников – 3, шестиклассников – 4, семиклассников – 4.

Решение. Пусть искомое число участников

$$n = a + b + c, \qquad (*)$$

где a – число пятиклассников, b – число шестиклассников, c – число семиклассников. Заметим: $a < c$ и все три числа составляют от общего количества участников больше 0,25 и меньше 0,5 по условию. Рассмотрим все оставшиеся варианты суммы (*) с учётом этих замечаний.

5=1+2+2. Не выполнено условие для шестиклассников.

7=2+2+3. Не выполнено условие для шестиклассников.

8=2+3+3. Не выполнено условие для пятиклассников.

9=3+3+3. Не выполнено условие $a < c$.

10=3+3+4. Не выполнено условие для шестиклассников.

11=3+4+4. Выполнены все условия.

Критерии оценивания. Получен верный ответ на основе полного перебора без потери случаев – 13 баллов. Получен верный ответ, но при этом рассмотрены не все возможные случаи – 7 баллов. За верный ответ без объяснения 2 балла.

2. (12 *баллов*) В семье четверо детей разного возраста. Их суммарный возраст составляет 31 год. 4 года назад суммарный возраст всех детей семьи составлял 16 лет, 7 лет назад 8 лет, а 11 лет назад 1 год. Сколько лет детям в настоящий момент? (Возраст всегда выражается целым числом лет.)

Ответ: 3, 6, 10, 12 лет.

Решение. Начнём с конца. 11 лет назад ребёнок был один и ему был 1 год. Назовём его старшим ребёнком. 7 лет назад старшему было 5 лет, второму ребёнку – 3 года либо старшему – 5 лет, второму – 2 года, третьему – 1 год. Больше вариантов нет в силу того, что все дети разного возраста. 4 года назад старшему было 8 лет, второму 6 лет, третьему – 2 года либо старшему – 8 лет, второму – 5, третьему – 4 года. Но по условию суммарный возраст 16 лет, следовательно, второй вариант исключаем. Тогда в настоящее время старшему 12 лет, второму – 10 лет, третьему – 6 лет, а самому младшему – 3 года.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Имеются арифметические ошибки при верном ходе решения – минус 2 балла. Не рассмотрен второй случай в решении минус 3 балла.

3. (12 *баллов*) Четыре друга ходили в лес за грибами. Вернувшись, каждые двое из них посчитали, сколько грибов они собрали в сумме. Получились числа 6, 7, 9, 9, 11, 12. Сколько грибов собрал каждый?

Ответ: 2, 4, 5, 7.

Решение. Пусть $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ – количества собранных друзьями грибов. Тогда $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 + x_3 = 7$,. Отсюда $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5$. Отсюда $x_4 = 12 - x_3 = 7$. Так как есть неиспользованные условия, надо сделать проверку.

Замечание. Можно решить задачу, не вводя буквенных неизвестных. Например, 6+7+9 – это удвоенное количество грибов, собранных первыми тремя. Поэтому втроем они вместе собрали 11, и т.д.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Правильный ответ, полученный, например, перебором, без доказательства единственности решения: 4 балла. Угаданный ответ плюс доказательство существования (проверка) и единственности решения: 12 баллов. Отсутствие проверки (выяснения, что ответ удовлетворяет всем шести условиям) – минус 3 балла (то есть 9 баллов за правильное решение).

4. (13 *баллов*) В крупном шахматном интернет-турнире у каждого игрока было среди участников по три друга. Каждый провёл по одной партии со всеми участниками турнира, кроме трёх друзей. Могло ли быть проведено ровно 804 партии?

Ответ: Нет.

Решение. Если в турнире участвовало n игроков, то общее количество партий в турнире $\frac{n(n-4)}{2}$. Действительно, каждый игрок проводит по n–4 партии. В произведении $n(n-4)$ каждая партия учитывается дважды, поэтому общее количество партий в два раза меньше.

Выясним, возможно ли, что $\frac{n(n-4)}{2} = 804$ или $n(n-4) = 1608$? Заметим, что число 1608=8· 201 делится на 8, но не делится на 16. Оба множителя либо чётные либо оба нечётные, но так как число 1608 чётное, то оба множителя чётные. Кроме того, один из множителей должен делиться на 4, иначе $n(n - 4$ не будет делиться на 8. Но тогда и второй множитель делится на 4, а их произведение на 16. Противоречие.

Критерии оценивания. Обоснованно получен правильный ответ – 13 баллов. Правильно найдена формула для вычисления количества партий – 6 баллов. Сделан вывод, что оба множителя чётные – ещё 2 балла. Получено правильное противоречие ещё 5 баллов. Имеются арифметические ошибки – минус 2 балла.

5. (15 *баллов*) Плотностью тела ρ называют отношение массы тела m к его объёму V. Мерой массы, используемой в ювелирном деле, является карат (1 карат равен 0,2 грамма). Мерой длины, используемой во многих странах, является дюйм (1 дюйм равен 2,54 сантиметрам). Известно, что плотность алмаза составляет ρ=3,5 г/см^3. Переведите данное значение в караты на дюймы кубические.

Ответ: ≈287 карат/дюйм^3.

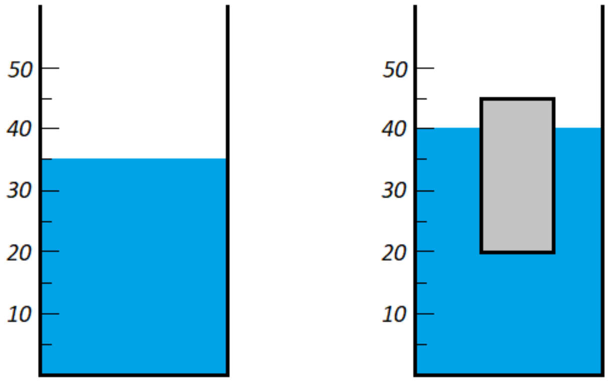
Решение. 1 грамм $= \frac{1}{0{,}2}$ карат $= 5$ карат, **(5 баллов)**

1 см $= \frac{1}{2{,}54}$ дюйма. **(5 баллов)**

Получаем: $\rho = 3{,}5\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 3{,}5\ \frac{5\ \text{карат}}{\left(\frac{1}{2{,}54}\ \text{дюйма}\right)^3} = 3{,}5 \cdot 5 \cdot 2{,}54^3\ \frac{\text{карат}}{\text{дюйм}^3} \approx 287\ \frac{\text{карат}}{\text{дюйм}^3}.$

(5 баллов)

6. (15 *баллов*) В мерный стакан с водой погрузили пластмассовый цилиндр. Определите объём цилиндра. Разметка стакана приведена в миллилитрах.



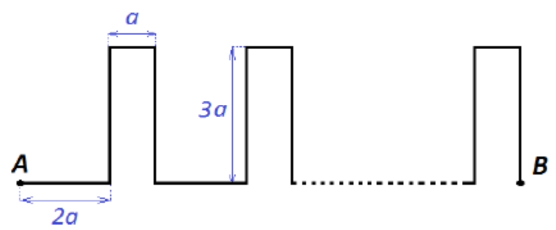
Ответ: 6,25 мл.

Решение. Объём погруженной части цилиндра $V_1 = (40 - 35) = 5$ мл.

(6 баллов)

Объём всего цилиндра: $V = \frac{45-20}{40-20} \cdot V_1 = 6{,}25$ мл. **(9 баллов)**

7. (10 *баллов*) Промышленный робот от точки A до точки B едет по заранее составленному алгоритму. На рисунке показана часть его повторяющейся траектории. Определите, во сколько раз быстрее он добрался бы от точки A до точки B, если бы двигался по прямой с втрое большей скоростью?



Ответ: в 9 раз.

Решение. Время, потраченное роботом на движение по заданной траектории:

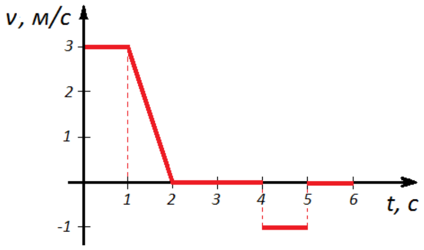
$t_1 = N\frac{2a+3a+a+3a}{v} = 9\frac{Na}{v}$. **(4 балла)**

Время, потраченное роботом при движении по прямой:

$t_2 = N\frac{2a+a}{3v} = \frac{Na}{v}$. **(4 балла)**

Получаем, что робот доберётся в $\frac{t_1}{t_2} = 9$ раз быстрее. **(2 балла)**

8. (10 *баллов*) Тело движется вдоль оси О*x*. Зависимость скорости от времени показана на рисунке. Определите путь, пройденный телом за 6 секунд.



Ответ: 5,5 метров.

Решение. За первую секунду тело проехало 3 метра. **(2 балла)**

За вторую – 1,5 метра. **(2 балла)**

За пятую – 1 метр. **(2 балла)**

Итого, весь пройденный путь – 5,5 метров. **(4 балла)**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (13 *баллов*) Какое наименьшее количество участников могло быть в школьном драмкружке, если пятиклассников в нём было больше 22%, но меньше 27%, шестиклассников больше 25%, но меньше 35%, а семиклассников больше 35%, но меньше 45% (участников из других классов не было).

Ответ: 9. Пятиклассников – 2, шестиклассников – 3, семиклассников – 4.

Решение. Пусть искомое число участников

$$n = a + b + c, \qquad (*)$$

где a – число пятиклассников, b – число шестиклассников, c – число семиклассников. Заметим: $a < c$ и все три числа составляют от общего количества участников больше 0,2 и меньше 0,5 по условию. Рассмотрим все оставшиеся варианты суммы (*) с учётом этих замечаний.

5=1+2+2. Не выполнено условие для шестиклассников.

7=2+2+3. Не выполнено условие для пятиклассников.

8=2+3+3. Не выполнено условие для шестиклассников.

9=2+3+4. Выполнены все условия.

Критерии оценивания. Получен верный ответ на основе полного перебора без потери случаев – 13 баллов. Получен верный ответ, но при этом рассмотрены не все возможные случаи – 7 баллов.

2. (12 *баллов*) В семье четверо детей разного возраста. Их суммарный возраст составляет 33 года. 3 года назад суммарный возраст всех детей семьи составлял 22 года, 7 лет назад 11 лет, а 13 лет назад 1 год. Сколько лет детям в настоящий момент? (Возраст всегда выражается целым числом лет.)

Ответ: 2, 6, 11, 14 лет.

Решение. Начнём с конца. 13 лет назад ребёнок был один и ему был 1 год. Назовём его старшим ребёнком. 7 лет назад старшему было 7 лет, второму ребёнку – 4 года либо старшему – 7 лет, второму – 3 года, третьему – 1 год. Больше вариантов нет в силу того, что все дети разного возраста. 3 года назад старшему было 11 лет, второму 8 лет, третьему – 3 года либо старшему – 11 лет, второму – 7 лет, третьему – 5 лет. Но по условию суммарный возраст 22 года, следовательно, второй вариант исключаем. Тогда в настоящее время старшему 14 лет, второму – 11 лет, третьему – 6 лет, а самому младшему – 2 года.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Имеются арифметические ошибки при верном ходе решения – минус 2 балла. Не рассмотрен второй случай в решении минус 3 балла.

3. (12 *баллов*) Четыре друга ходили в лес за грибами. Вернувшись, каждые двое из них посчитали, сколько грибов они собрали в сумме. Получились числа 7, 9, 10, 10, 11, 13. Сколько грибов собрал каждый?

Ответ: 3, 4, 6, 7.

Решение. Пусть $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ – количества собранных друзьями грибов. Тогда $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 + x_3 = 9$, . Отсюда $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6$. Отсюда $x_4 = 13 - x_3 = 7$. Так как есть неиспользованные условия, надо сделать проверку.

Замечание. Можно решить задачу, не вводя буквенных неизвестных. Например, 7+9+10 – это удвоенное количество грибов, собранных первыми тремя. Поэтому втроем они вместе собрали 13, и т.д.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Правильный ответ, полученный, например, перебором, без доказательства единственности решения: 4 балла. Угаданный ответ плюс доказательство существования (проверка) и единственности решения: 12 баллов. Отсутствие проверки (выяснения, что ответ удовлетворяет всем шести условиям) – минус 3 балла (то есть 9 баллов за правильное решение).

4. (13 *баллов*) В крупном шахматном интернет-турнире у каждого игрока было среди участников по три друга. Каждый провёл по одной партии со всеми участниками турнира, кроме трёх друзей. Могло ли быть проведено ровно 404 партии?

Ответ: Нет.

Решение. Если в турнире участвовало n игроков, то общее количество партий в турнире $\frac{n(n-4)}{2}$. Действительно, каждый игрок проводит по n–4 партии. В произведении $n(n-4)$ каждая партия учитывается дважды, поэтому общее количество партий в два раза меньше.

Выясним, возможно ли, что $\frac{n(n-4)}{2} = 404$ или $n(n-4) = 808$? Заметим, что число 808=8$\cdot$101 делится на 8, но не делится на 16. Оба множителя либо чётные либо оба нечётные, но так как число 808 чётное, то оба множителя чётные. Кроме того, один из множителей должен делиться на 4, иначе $n(n - 4$ не будет делиться на 8. Но тогда и второй множитель делится на 4, а их произведение на 16, получено противоречие.

Критерии оценивания. Обоснованно получен правильный ответ – 13 баллов. Правильно найдена формула для вычисления количества партий – 6 баллов. Сделан вывод, что оба множителя чётные ещё 2 балла. Получено правильное противоречие ещё 5 баллов. Имеются арифметические ошибки – минус 2 балла.

5. (15 *баллов*) Плотностью тела ρ называют отношение массы тела m к его объёму V. Мерой массы, используемой в ювелирном деле, является карат (1 карат равен 0,2 грамма). Мерой длины, используемой во многих странах, является дюйм (1 дюйм равен 2,54 сантиметрам). Известно, что плотность изумруда составляет ρ=2,7 г/см^3. Переведите данное значение в караты на дюймы кубические.

Ответ: ≈221 карат/дюйм^3.

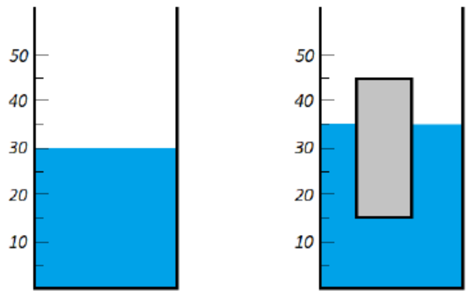
Решение. 1 грамм $= \frac{1}{0,2}$ карат $=$ 5 карат, **(5 баллов)**

1 см $= \frac{1}{2,54}$ дюйма. **(5 баллов)**

Получаем: $\rho = 2,7\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 2,7\ \frac{5\ \text{карат}}{\left(\frac{1}{2,54}\text{дюйма}\right)^3} = 2,7 \cdot 5 \cdot 2,54^3\ \frac{\text{карат}}{\text{дюйм}^3} \approx 221\ \frac{\text{карат}}{\text{дюйм}^3}$.

(5 баллов)

6. (15 *баллов*) В мерный стакан с водой погрузили пластмассовый цилиндр. Определите объём цилиндра. Разметка стакана приведена в миллилитрах.

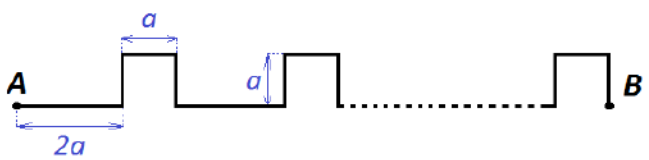


Ответ: 7,5 мл.

Решение. Объём погруженной части цилиндра $V_1 = (35 - 30) = 5$ мл. **(6 баллов)**

Объём всего цилиндра: $V = \frac{45-15}{35-15} \cdot V_1 = 7,5$ мл. **(9 баллов)**

7. (10 *баллов*) Промышленный робот от точки A до точки B едет по заранее составленному алгоритму. На рисунке показана часть его повторяющейся траектории. Определите, во сколько раз быстрее он добрался бы от точки A до точки B, если бы двигался по прямой с вдвое большей скоростью?



Ответ: в 3,33 раза.

Решение. Время, потраченное роботом на движение по заданной траектории:

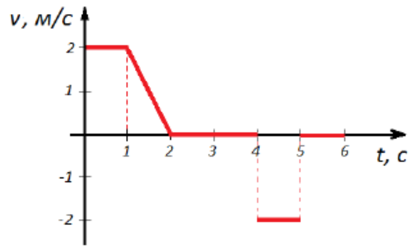
$t_1 = N\frac{2a+a+a+a}{v} = 5\frac{Na}{v}$. **(4 балла)**

Время, потраченное роботом при движении по прямой:

$t_2 = N\frac{2a+a}{2v} = 1{,}5\frac{Na}{v}$. **(4 балла)**

Получаем, что робот доберётся в $\frac{t_1}{t_2} = 3{,}33$ раза быстрее. **(2 балла)**

8. (10 *баллов*) Тело движется вдоль оси О*x*. Зависимость скорости от времени показана на рисунке. Определите путь, пройденный телом за 6 секунд.



Ответ: 5 метров.

Решение. За первую секунду тело проехало 2 метра. **(2 балла)**

За вторую – 1 метр. **(2 балла)**

За пятую – 2 метра. **(2 балла)**

Итого, весь пройденный путь – 5 метров. **(4 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

7 класс **Заключительный тур** **2022-2023**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Четыре друга ходили в лес за грибами. Вернувшись, каждые двое из них посчитали, сколько грибов они собрали в сумме. Получились числа 6, 7, 9, 9, 11, 12. Сколько грибов собрал каждый?

Ответ: 2, 4, 5, 7.

Решение. Пусть $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ – количества собранных друзьями грибов. Тогда $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 + x_3 = 7$,. Отсюда $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5$. Отсюда $x_4 = 12 - x_3 = 7$. Так как есть неиспользованные условия, надо сделать проверку.

Замечание. Можно решить задачу, не вводя буквенных неизвестных. Например, 6+7+9 – это удвоенное количество грибов, собранных первыми тремя. Поэтому втроем они вместе собрали 11, и т.д.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Правильный ответ, полученный, например, перебором, без доказательства единственности решения: 4 балла. Угаданный ответ плюс доказательство существования (проверка) и единственности решения: 12 баллов. Отсутствие проверки (выяснения, что ответ удовлетворяет всем шести условиям) – минус 3 балла (то есть 9 баллов за правильное решение).

2. (12 *баллов*) Найдите натуральное число n такое, что числа n+30 и n–17 являются квадратами других чисел.

Ответ: 546.

Решение. Из условия задачи следует, что $\begin{cases} n + 30 = k^2, \\ n - 17 = m^2. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получаем $k^2 - m^2 = 47\ (*)$ или $(k - m)(k + m) = 47$. Так как 47 – простое число, то возможны варианты $\begin{cases} k - m = \pm 1, \\ k + m = \pm 47, \end{cases}$ или наоборот $\begin{cases} k - m = \pm 47, \\ k + m = \pm 1, \end{cases}$ но для любого варианта $k=\pm 24$. Тогда $n = 24^2 - 30 = 546$.
Проверка: $n - 17 = 546 - 17 = 529 = 23^2$.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Получено уравнение (*) ставить 6 баллов, получены все возможные варианты для множителей плюс 3 балла. Если ход решения верный, но имеются арифметические ошибки минус 2 балла.

3. (13 *баллов*) Суперкомпьютер Петя взял натуральное число $\boldsymbol{a}$>**2**, нашёл площадь прямоугольника со сторонами $\boldsymbol{a}$–2 и $\boldsymbol{a}$+3 и отнял от результата $\boldsymbol{a}$. У него получилось удивительное число, в десятичной записи которого оказались в каком-то порядке только **2023** восьмерки, нули и **2023** тройки. Не ошибся ли Петя в расчётах? Свой ответ обоснуйте.

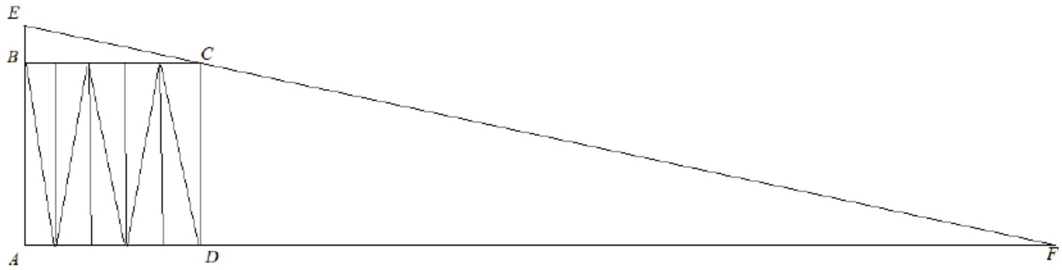
Ответ: Петя ошибся.

Решение. У полученного Петей числа $\boldsymbol{a^2}$–**6** (*) сумма цифр равна $2023 \cdot 8 + 2023 \cdot 3$. Это число при делении на 3 даёт остаток 2, следовательно, и $\boldsymbol{a^2}$–**6** при делении на 3 даёт остаток 2, то есть $\boldsymbol{a^2}$ при делении на 3 дает остаток 2, но это невозможно. Действительно, если число $\boldsymbol{a}$ не делится на 3, то есть имеет вид $\boldsymbol{a = 3n + 1}$ либо $\boldsymbol{a = 3n + 2}$, то его квадрат при делении на 3 даёт в остатке 1.

Критерии оценивания. Получено, что число имеет вид (*) – 1 балл. Замечено, что данное число при делении на 3 даёт остаток 2, плюс 3 балла. Сделан вывод, что и число $\boldsymbol{a^2}$ при делении на 3 даёт остаток 2, ещё плюс 2 балла. Получено противоречие плюс 6 баллов. Полное решение – 13 баллов.

4. (13 *баллов*) Найдётся ли треугольная пицца, от которой можно последовательно отре́зать **11** одинаковых треугольных кусочков, причём каждый кусочек надо отреза́ть одним прямолинейным разрезом? Если да, нарисуйте эту треугольную пиццу и опишите, как её надо разрезать.

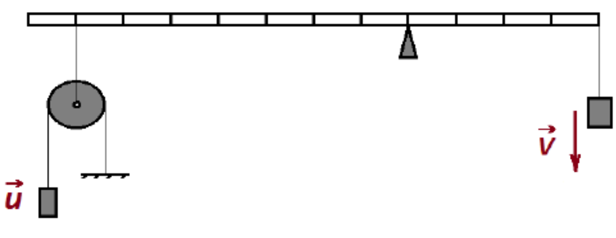
Ответ. Можно, смотри рисунок.



Решение (пример). Возьмём произвольный квадрат $ABCD$ и разрежем на 5 одинаковых прямоугольных (вертикальных) полос, и каждую полосу – на 2 треугольника по диагонали. Получим 10 одинаковых треугольников. Еще один такой же треугольник BEC пристроим сверху над квадратом. Прямые EC и AD продолжим до пересечения в точке F. Треугольник AEF – искомая «пицца» (см. рис.). Отрезаем кусочки так: сначала сверху треугольник $BEC,$ а затем слева направо еще 10 треугольников.

Критерии оценивания. Любое правильное решение – 13 баллов. Приведён пример на 5 кусочков – 3 балла.

5. (10 *баллов*) Определите направление и значение скорости левого груза u, если скорость правого груза v=1 м/с. Нити нерастяжимые и невесомые, рычаг жёсткий.



Ответ: 3,5 м/с; вверх.

Решение. Скорость центра блока направлена вверх и равна:

$v_c = \frac{7}{4}v = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}.$ **(4 балла)**

Получаем: $u = 2v_c = 2 \cdot \frac{7}{4} = 3{,}5\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}.$ **(4 балла)**

Скорость левого груза направлена вверх. **(2 балла)**

6. (15 *баллов*) Каждый день из дома на работу Иван Ивановича отвозит служебная машина. Однажды Иван Иванович решил пройтись пешком и вышел из дома на час раньше обычного. По дороге он встретил служебную машину, и остаток пути доехал на ней. В результате он приехал на работу на 10 минут раньше обычного времени. Сколько времени Иван Иванович шёл пешком?

Ответ: 55 минут.

Решение. Так как Иван Иванович сэкономил своим походом водителю 10 минут, то автомобиль проезжает от дома Иван Ивановича до места встречи за 5 минут. **(3 балла)**

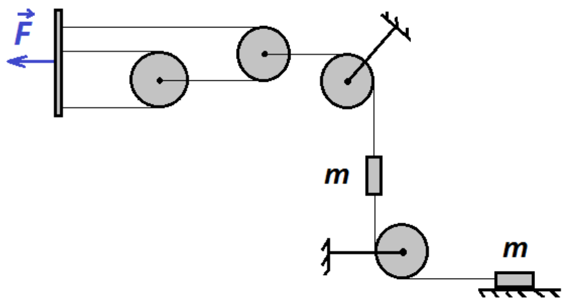
Получаем: $uT = 5v,$ (1) **(2 балла)**

где u – скорость Иван Ивановича, v – скорость автомобиля, T – время, которое Иван Иванович шёл пешком. Расстояние от дома Иван Ивановича до места работы: $s = vt,$ (2) **(2 балла)**

а с другой стороны: $s = uT + v(t - T + 50).$ (3) **(4 балла)**

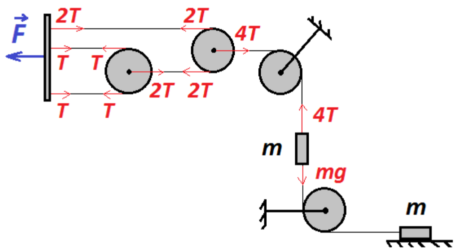
Решая систему уравнений (1), (2) и (3), получаем: $T = 55$ минут. **(4 балла)**

7. (10 *баллов*) Определите силу F, которую необходимо приложить к пластине, чтобы сдвинуть с места груз массой m=2 кг, лежащий на горизонтальной гладкой поверхности. Все блоки гладкие и невесомые. Ускорение свободного падения g=10 Н/кг.



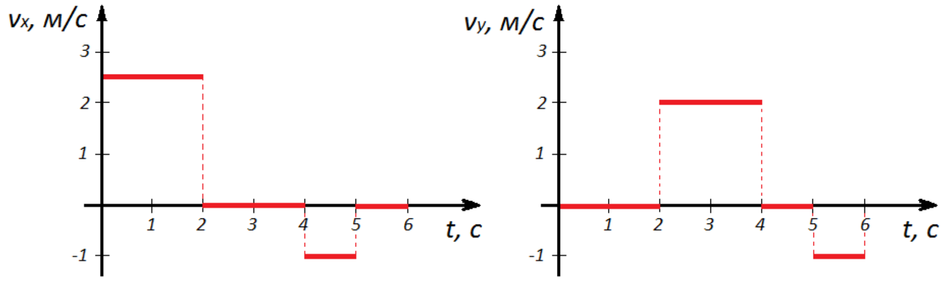
Ответ: 20 Н.

Решение. Расставим силы, действующие в данной системе: **(6 баллов)**



Получаем: $F = 4T = mg = 2 \cdot 10 = 20$ Н. **(4 балла)**

8. (15 *баллов*) Тело едет по горизонтальной плоскости. На графиках приведены зависимости проекций скорости вдоль осей Оx и Оy от времени. Определите кратчайшее расстояние между начальной и конечной точками.



Ответ: 5 метров.

Решение. Тело, двигаясь вдоль оси Оx, проехало за первые две секунды 5 метров, потом две секунды координата не изменялась, и за пятую секунду проехало ещё 1 метр в обратную сторону. Итого смещение вдоль оси Оx составило ΔX=4 м. **(5 баллов)**

Тело, двигаясь вдоль оси Оy, первые две секунды было неподвижно, за следующие две секунды проехало 4 метра, затем одну секунду опять стояло, и за последнюю секунду проехало 1 метр в обратную сторону. Итого смещение вдоль оси Оy составило ΔY=3 м. **(5 баллов)**

В результате, от начальной точки тело уехало на:

$\Delta S = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ метров. **(5 баллов)**

Замечание. Данный результат можно было получить с помощью графика X-Y, изобразив смещения ΔX и ΔY (соблюдая масштаб), и измерив расстояние между начальной и конечной точками линейкой. При наличии верного ответа, данный способ также оценивается максимальным баллом.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

7 класс **Заключительный тур** **2022-2023**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Четыре друга ходили в лес за грибами. Вернувшись, каждые двое из них посчитали, сколько грибов они собрали в сумме. Получились числа 7, 9, 10, 10, 11, 13. Сколько грибов собрал каждый?

Ответ: 3, 4, 6, 7.

Решение. Пусть $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ – количества собранных друзьями грибов. Тогда $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 + x_3 = 9$, . Отсюда $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6$. Отсюда $x_4 = 13 - x_3 = 7$. Так как есть неиспользованные условия, надо сделать проверку.

Замечание. Можно решить задачу, не вводя буквенных неизвестных. Например, 7+9+10 – это удвоенное количество грибов, собранных первыми тремя. Поэтому втроем они вместе собрали 13, и т.д.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Правильный ответ, полученный, например, перебором, без доказательства единственности решения: 4 балла. Угаданный ответ плюс доказательство существования (проверка) и единственности решения: 12 баллов. Отсутствие проверки (выяснения, что ответ удовлетворяет всем шести условиям) – минус 3 балла (то есть 9 баллов за правильное решение).

2. (12 *баллов*) Найдите натуральное число n такое, что числа n+15 и n–14 являются квадратами других чисел.

Ответ: 210.

Решение. Из условия задачи следует, что $\begin{cases} n + 15 = k^2, \\ n - 14 = m^2. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получаем $k^2 - m^2 = 29\ (*)$ или $(k - m)(k + m) = 29$. Так как 29 – простое число, то возможны варианты $\begin{cases} k - m = \pm 1, \\ k + m = \pm 29, \end{cases}$ или наоборот $\begin{cases} k - m = \pm 29, \\ k + m = \pm 1, \end{cases}$ но для любого варианта $k=\pm 15$. Тогда $n = 15^2 - 15 = 210$.

Проверка: $n - 14 = 210 - 14 = 196 = 14^2$.

Критерии оценивания. Полное решение 12 баллов. Получено уравнение (*) ставить 6 баллов, получены все возможные варианты для множителей плюс 3 балла. Если ход решения верный, но имеются арифметические ошибки минус 2 балла.

3. (13 *баллов*) Суперкомпьютер Петя взял натуральное число ***a*>3**, нашёл площадь прямоугольника со сторонами ***a*–3** и ***a*+4** и отнял от результата ***a***. У него получилось удивительное число, в десятичной записи которого оказались в каком-то порядке только **2023** восьмерки, нули и **2023** тройки. Не ошибся ли Петя в расчётах? Свой ответ обоснуйте.

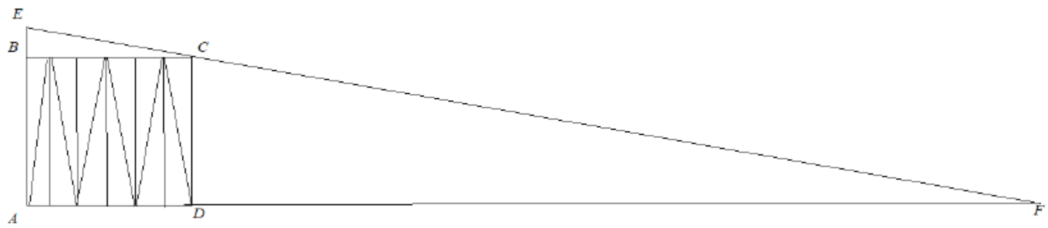
Ответ: Петя ошибся.

Решение. У полученного Петей числа $\boldsymbol{a}^2$–12 (*) сумма цифр равна $2023 \cdot 8 + 2023 \cdot 3$. Это число при делении на 3 даёт остаток 2, следовательно, и $\boldsymbol{a}^2$–**12** при делении на 3 даёт остаток 2, то есть $\boldsymbol{a}^2$ при делении на 3 дает остаток 2, но это невозможно. Действительно, если число $\boldsymbol{a}$ не делится на 3, то есть имеет вид $\boldsymbol{a = 3n + 1}$ либо $\boldsymbol{a = 3n + 2}$, то его квадрат при делении на 3 даёт в остатке 1.

Критерии оценивания. Получено, что число имеет вид (*) – 1 балл. Замечено, что данное число при делении на 3 даёт остаток 2, плюс 3 балла. Сделан вывод, что и число $\boldsymbol{a}^2$ при делении на 3 даёт остаток 2, ещё плюс 2 балла. Получено противоречие плюс 6 баллов. Полное решение – 13 баллов.

4. (13 *баллов*) Найдётся ли треугольная пицца, от которой можно последовательно отре́зать **13** одинаковых треугольных кусочков, причём каждый кусочек надо отреза́ть одним прямолинейным разрезом? Если да, нарисуйте эту треугольную пиццу и опишите, как её надо разрезать.

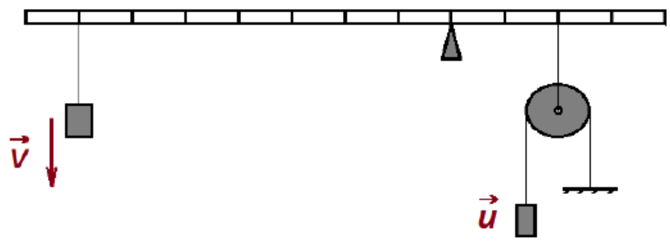
Ответ. Можно, смотри рисунок.



Решение (пример). Возьмём произвольный квадрат $ABCD$ и разрежем на 6 одинаковых прямоугольных (вертикальных) полос, и каждую полосу – на 2 треугольника по диагонали. Получим 12 одинаковых треугольников. Ещё один такой же треугольник BEC пристроим сверху над квадратом. Прямые EC и AD продолжим до пересечения в точке F. Треугольник AEF – искомая «пицца» (см. рис.). Отрезаем кусочки так: сначала сверху треугольник BEC, а затем слева направо еще 12 треугольников.

Критерии оценивания. Любое правильное решение – 13 баллов. Приведён пример на 5 кусочков – 3 балла.

5. (10 *баллов*) Определите направление и значение скорости правого груза u, если скорость левого груза v=0,5 м/с. Нити нерастяжимые и невесомые, рычаг жёсткий.



Ответ: 0,29 м/с; вверх.

Решение. Скорость центра блока направлена вверх и равна:

$v_c = \frac{2}{7}v = \frac{2}{7}\cdot 0{,}5 = \frac{1}{7}\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}.$ **(4 балла)**

Получаем: $u = 2v_c = 2\cdot\frac{1}{7} = 0{,}29\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}.$ **(4 балла)**

Скорость правого груза направлена вверх. **(2 балла)**

6. (15 *баллов*) Каждый день из дома на работу Иван Ивановича отвозит служебная машина. Однажды Иван Иванович решил пройтись пешком и вышел из дома на полтора часа раньше обычного. По дороге он встретил служебную машину, и остаток пути доехал на ней. В результате он приехал на работу на 20 минут раньше обычного времени. Сколько времени Иван Иванович шёл пешком?

Ответ: 80 минут.

Решение. Так как Иван Иванович сэкономил своим походом водителю 20 минут, то автомобиль проезжает от дома Иван Ивановича до места встречи за 10 минут. **(3 балла)**

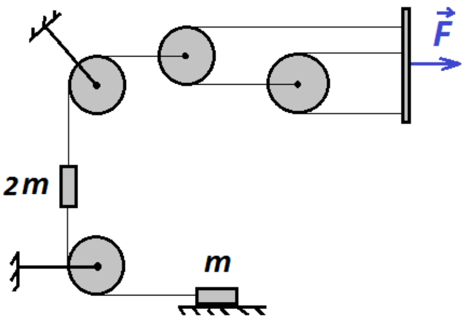
Получаем: $uT = 10v,$ (1) **(2 балла)**

где u – скорость Иван Ивановича, v – скорость автомобиля, T – время, которое Иван Иванович шёл пешком. Расстояние от дома Иван Ивановича до места работы: $s = vt,$ (2) **(2 балла)**

а с другой стороны: $s = uT + v(t - T + 70).$ (3) **(4 балла)**

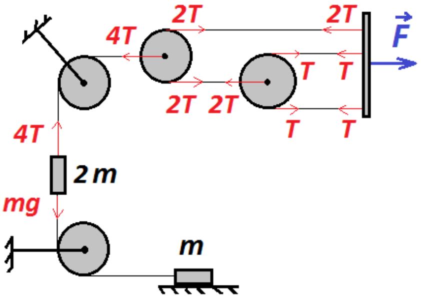
Решая систему уравнений (1), (2) и (3), получаем $T = 80$ минут. **(4 балла)**

7. (10 *баллов*) Определите силу F, которую необходимо приложить к пластине, чтобы сдвинуть с места груз массой m=3 кг, лежащий на горизонтальной гладкой поверхности. Все блоки гладкие и невесомые. Ускорение свободного падения g=10 Н/кг.



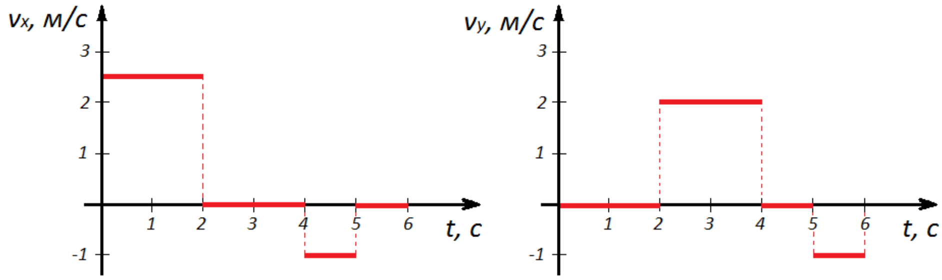
Ответ: 60 Н.

Решение. Расставим силы, действующие в данной системе: **(6 баллов)**



Получаем: $F = 4T = 2mg = 2 \cdot 3 \cdot 10 = 60$ Н. **(4 балла)**

8. (15 *баллов*) Тело едет по горизонтальной плоскости. На графиках приведены зависимости проекций скорости вдоль осей О*x* и О*y* от времени. Определите кратчайшее расстояние между начальной и конечной точками.



Ответ: 5 метров.

Решение. Тело, двигаясь вдоль оси О*x*, проехало за первые две секунды 5 метров, потом две секунды координата не изменялась, и за пятую секунду проехало еще 1 метр в обратную сторону. Итого смещение вдоль оси О*x* составило ΔX=4 м. **(5 баллов)**

Тело, двигаясь вдоль оси О*y*, первые две секунды было неподвижно, за следующие две секунды проехало 4 метра, затем одну секунду опять стояло, и за последнюю секунду проехало 1 метр в обратную сторону. Итого смещение вдоль оси О*y* составило ΔY=3 м. **(5 баллов)**

В результате, от начальной точки тело уехало на:

$\Delta S = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ метров. **(5 баллов)**

Замечание. Данный результат можно было получить с помощью графика *X*-*Y*, изобразив смещения ΔX и ΔY (соблюдая масштаб), и измерив расстояние между начальной и конечной точками линейкой. При наличии верного ответа, данный способ также оценивается максимальным баллом.

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $3p + q = 2023$. Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.

Ответ: Все графики пересекаются в точке (3;2032).

Решение. Пусть x=3. Тогда $y = 9 + 3p + q = 2032$.

Критерии оценивания. Правильное решение 12 баллов.

2. (13 *баллов*) В зале пол имеет размеры 4×5 м^2, а высота потолка 4 м. На потолке в одном углу сидит муха Маша, а в противоположном углу потолка – паук Петя. Маша направилась пешком в гости к Пете по кратчайшему маршруту, но с заходом на пол. Найдите длину пройденного ею пути.

Ответ: $\sqrt{145}$ м.

Решение. Пусть муха сидит в вершине M, паук сидит в вершине $П$ (Рис 1.).

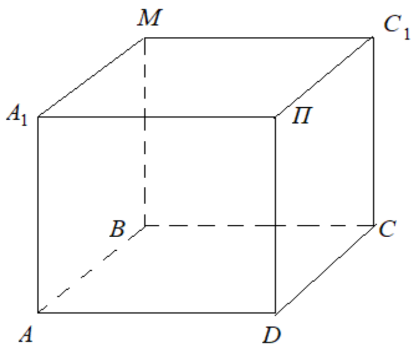


Рис.1.

Существует 4 выбора пути у Маши.

Маша может начать путь с грани (стены) BMC_1C, пройти по полу и закончить путешествие по стене $DAA_1П$. Тогда её кратчайший путь до Пети виден на развёртке (Рис.2.).

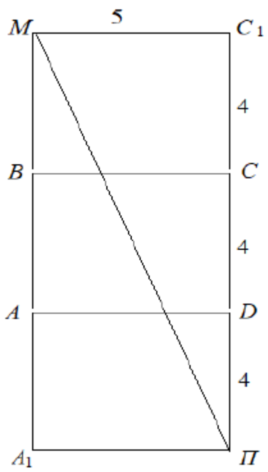


Рис.2.

В этом случае длина пути равна $\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$ м (теорема Пифагора).

Во втором случае Маша может начать путь с грани BMA_1A и тогда её кратчайший путь до Пети виден на развёртке (Рис.3.).

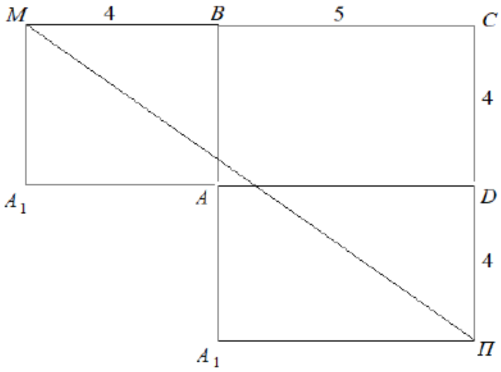


Рис.3.

В этом случае длина пути равна $\sqrt{9^2+8^2}=\sqrt{145}$ м.

В третьем случае Маша начнёт, как и в первом, со стены BMC_1C, но закончит движение по стене $DПC_1C$. В этом случае длина пути равна, как и во втором случае, $\sqrt{9^2+8^2}=\sqrt{145}$ м.

В четвёртом случае Маша начнёт, как и во втором, со стены BMA_1A, а закончит по грани $DПC_1C$. Длина пути в этом случае $\sqrt{4^2+13^2}=\sqrt{185}$ м.

Кратчайший путь Маши $\sqrt{145}$ м.

Критерии оценивания. Правильное полное решение – 13 баллов. Предложен не кратчайший маршрут (один из приведённых в решении), но правильно найдена его длина – 6 баллов. Если предложен маршрут, не являющийся отрезком прямой на какой-либо развертке, и объявлен кратчайшим, то 0 баллов за задачу. Выбран правильный маршрут, но не обосновано, почему он кратчайший, при правильном ответе – 11 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла.

3. (12 *баллов*) Имеются четыре гири различного веса. Катя попарно взвешивает гири. В результате получилось 1800, 1970, 2110, 2330 и 2500 граммов. Сколько граммов весит шестой вариант взвешивания?

Ответ: 2190.

Решение. Пусть x, y, z, t – вес каждой гири. Тогда попарные взвешивания будут составлять $x+y$, $x+z$, $x+t$, $y+z$, $y+t$, $z+t$ грамм. Существуют три пары данных чисел: 1) $x+y$ и $z+t$, 2) $x+z$ и $y+t$, 3) $x+t$ и $y+z$, – с одинаковым весом $x+y+z+t$. Найдём пары с одинаковой суммой: $1800+2500=1970+2330=4300$. Заметим, что других пар данных чисел с одинаковой суммой нет. Тогда шестой вариант взвешивания: $4300-2110=2190$.

Критерии оценивания. Полное решение – 12 баллов. Если участник заметил, что три пары из шести чисел – суммарных весов двух гирь, в сумме дают вес всех гирь, и поэтому должны быть одинаковы, ставить 7 баллов. Найден суммарный вес всех гирь – ещё 2 балла. Замечено, что других пар данных чисел с одинаковой суммой, кроме найденных, нет – еще 2 балла. Арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла.

4. (13 *баллов*) По кругу стоят 16 человек: каждый из них либо правдивый (он всегда говорит правду), либо лжец (он всегда лжёт). Все сказали, что оба соседа у них – лжецы. Какое наибольшее количество лжецов может быть в этом круге?

Ответ: 10.

Решение. Рядом с правдивым могут стоять только лжецы. Три лжеца подряд стоять не могут, поэтому между двумя любыми ближайшими правдивыми один или два лжеца. Тогда, если правдивых 5 или меньше, в промежутках между ними могут стоять в общей сложности не более 10 лжецов, то всего не более 15 человек. Получено противоречие. Следовательно, правдивых не меньше 6, а лжецов не больше 10. Пример на 10 лжецов легко приводится.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Построен пример – 3 балла. Доказана оценка – 9 баллов. Названа, но не обоснована верная оценка в результате рассмотрения примеров 2 балла.

5. (15 *баллов*) Стакан до краёв наполнен солёной водой. При этом на поверхности плавает пресный лёд массой m=50 г. Какой объём ΔV воды выльется из стакана к моменту когда лёд растает? Поверхностным натяжением пренебречь. Плотность пресного льда $\rho_{п}$=0,9 г/см^3, плотность солёного льда $\rho_{с}$=0,95 г/см^3, плотность пресной воды $\rho_{пв}$=1 г/см^3, плотность солёной воды $\rho_{св}$=1,03 г/см^3. Изменением суммарного объёма при смешивании двух жидкостей пренебречь.

Ответ: ≈2,63 см^3.

Решение. Условие плавания пресного льда в солёной воде:

$$\rho_{св} g V_{погр} = mg = \rho_{п} g V_1, \qquad \textbf{(4 балла)}$$

где V_1 – весь объём пресного льда, $\rho_{св}$ – плотность солёной воды.

Условие плавания солёного льда такой же массы в солёной воде:

$$\rho_{св} g V_{погр} = mg = \rho_{с} g V_2,, \qquad \textbf{(4 балла)}$$

где V_2 – весь объём солёного льда.

Солёный лёд при таянии занимает ровно объём $V_{погр}$. Лишний объём льда, который после таяния окажется за пределами стакана:

$V_1 - V_2 = \frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}$. **(3 балла)**

А с учётом того, что он растает, то объём вылившейся воды:

$\Delta V = \left(\frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}\right) \cdot \frac{\rho_п}{\rho_{пв}} \approx 2{,}63\ см^3$. **(4 балла)**

6. (10 *баллов*) Зимой, при температуре окружающего воздуха $t_о$=–10 $^OС$, каждый квадратный метр озера отдаёт в воздух 200 кДж тепла в час. Оцените через какое время после начала образования льда, на поверхность водоёма сможет выйти рыбак, если безопасная толщина льда составляет 10 см? Температура воды $t_в$=0°С. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, его удельная теплоёмкость 2100 Дж/кг·°С, плотность льда 900 кг/м^3. Скорость теплоотдачи считать постоянной.

Ответ: ≈153,2 часа.

Решение. Внутри образовавшегося льда температура линейно меняется от 0°С в глубине до –10°С на поверхности. То есть можно считать, что отдаваемое тепло получается за счёт кристаллизации льда и его последующего охлаждения в среднем до –5°С. **(3 балла)**

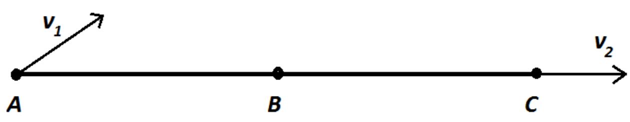
Масса квадратного метра льда, способного выдержать человека:

$m = \rho V = \rho S h = 900 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 90$ кг. **(2 балла)**

Получаем $200\ 000 = \frac{Q}{t} = \frac{\lambda m + cm\Delta T}{t}$. **(3 балла)**

В результате $t = \frac{\lambda m + cm\Delta T}{200\ 000} = \frac{330\ 000 \cdot 90 + 2100 \cdot 90 \cdot 5}{200\ 000} = 153{,}225$ часа. **(2 балла)**

7. (15 *баллов*) Твёрдый стержень двигается по горизонтальному столу. В определённый момент времени скорость одного конца стержня v_1=5 м/с, а скорость другого v_2=4 м/с, и она направлена вдоль оси стержня (см. рисунок). Определите для этого момента времени скорость середины стержня.



Ответ: ≈4,3 м/с.

Решение. У всех точек стержня есть составляющая скорости, которая направлена направо, равная v_2. **(4 балла)**

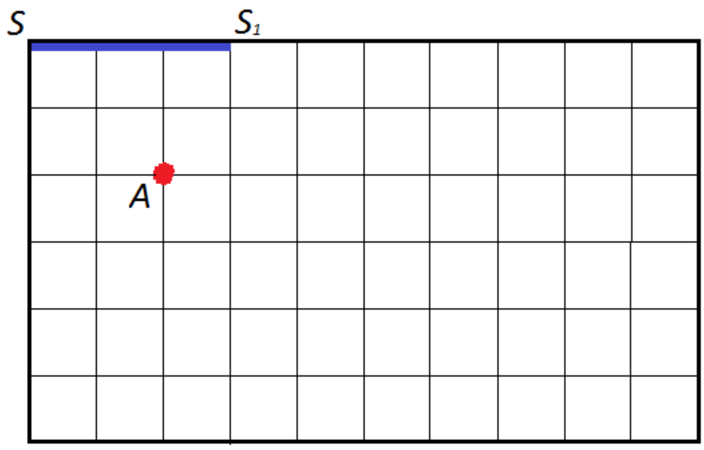
Следовательно, составляющая скорости, которая направлена вверх, для точки A: $v_{верт\ А} = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 3$ м/с. **(4 балла)**

Составляющая скорости точки B, которая направлена вверх:

$v_{\text{верт B}} = \frac{1}{2} v_{\text{верт A}} = 1{,}5$ м/с. **(4 балла)**

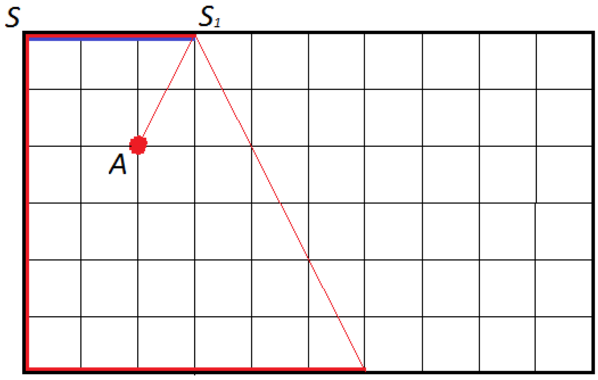
Полная скорость точки B: $v = \sqrt{v_2^2 + v_{\text{верт B}}^2} = \sqrt{4^2 + 1{,}5^2} \approx 4{,}3$ м/с. **(3 балла)**

8. (10 *баллов*) В прямоугольной комнате находится точечный источник света A, свет от которого падает только на плоское зеркало SS_1, которое занимает часть одной из стен в полную высоту комнаты. Определите долю стен, которые неосвещены.



Ответ: ≈0,53.

Решение: Угол падения равен углу отражения: **(2 балла)**



(3 балла)

Получаем, что отношение неосвещённой площади стен к общей площади: $\frac{17}{32} \approx 0{,}53$ **(5 баллов)**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $-2p + q = 2023$. Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.

Ответ: Все графики пересекаются в точке (–2;2027).

Решение. Пусть x= –2. Тогда $y = 4 - 2p + q = 2027$.

Критерии оценивания. Правильное решение 12 баллов.

2. (13 *баллов*) В зале пол имеет размеры 7×8 м^2, а высота потолка 4 м. На потолке в одном углу сидит муха Маша, а в противоположном углу потолка – паук Петя. Маша направилась пешком в гости к Пете по кратчайшему маршруту, но с заходом на пол. Найдите длину пройденного ею пути.

Ответ: $\sqrt{265}$ м.

Решение. Пусть муха сидит в вершине M, паук сидит в вершине $П$ (Рис 1.).

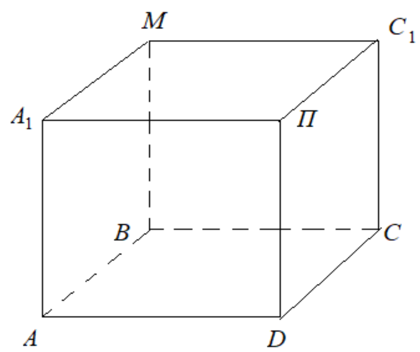


Рис.1.

Существует 4 выбора пути у Маши.

Маша может начать путь с грани (стены) BMC_1C, пройти по полу и закончить путешествие по стене $DAA_1П$. Тогда её кратчайший путь до Пети виден на развёртке (Рис.2.).

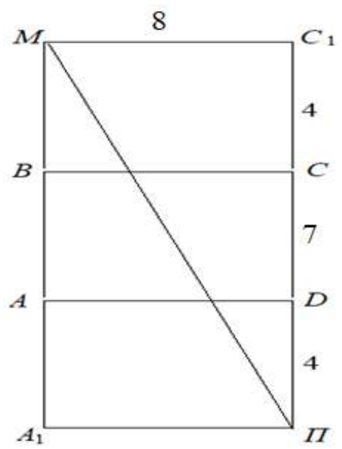


Рис.2.

В этом случае длина пути равна $\sqrt{15^2+8^2}=\sqrt{289}=17$ м (теорема Пифагора).

Во втором случае Маша может начать путь с грани BMA_1A и тогда её кратчайший путь до Пети виден на развёртке (Рис.3.).

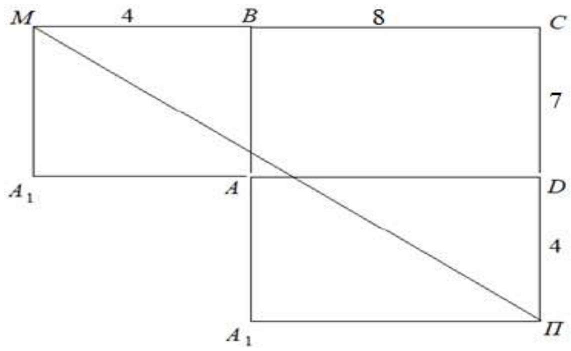


Рис.3.

В этом случае длина пути равна $\sqrt{11^2+12^2}=\sqrt{265}$ м.

В третьем случае Маша начнёт, как и в первом, со стены BMC_1C, но закончит движение по стене $DПC_1C$. В этом случае длина пути равна, как и во втором случае, $\sqrt{11^2+12^2}=\sqrt{265}$ м.

В четвёртом случае Маша начнёт, как и во втором, со стены BMA_1A, а закончит по грани $DПC_1C$. Длина пути в этом случае $\sqrt{7^2+16^2}=\sqrt{305}$ м.

Кратчайший путь Маши $\sqrt{265}$ м.

Критерии оценивания. Правильное полное решение – 13 баллов. Предложен не кратчайший маршрут (один из приведенных в решении), но правильно найдена его длина – 6 баллов. Если предложен маршрут, не являющийся отрезком прямой на какой-либо развёртке, и объявлен кратчайшим, то 0 баллов за задачу. Выбран правильный маршрут, но не обосновано, почему он кратчайший, при правильном ответе – 11 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла.

3. (12 *баллов*) Имеются четыре гири различного веса. Катя попарно взвешивает гири. В результате получилось 1700, 1870, 2110, 2330 и 2500 граммов. Сколько граммов весит шестой вариант взвешивания?

Ответ: 2090.

Решение. Пусть $x,\ y,\ z,\ t$ – вес каждой гири. Тогда попарные взвешивания будут составлять $x+y,\ x+z,\ x+t,\ y+z,\ y+t,\ z+t$ грамм. Существуют три пары: 1) $x+y$ и $z+t$, 2) $x+z$ и 3) $y+t$, $x+t$ и $y+z$ с одинаковым весом $x+y+z+t$. Найдём пары с одинаковой суммой: $1700+2500=$

$1870 + 2330$. Заметим, что других пар данных чисел с одинаковой суммой нет. Тогда шестой вариант взвешивания: $4200 - 2110 = 2090$.

Критерии оценивания. Полное решение – 12 баллов. Если участник заметил, что три пары из шести чисел – суммарных весов двух гирь, в сумме дают вес всех гирь, и поэтому должны быть одинаковы, ставить 7 баллов. Найден суммарный вес всех гирь – ещё 2 балла. Замечено, что других пар данных чисел с одинаковой суммой, кроме найденных, нет – еще 2 балла. Арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла.

4. (13 *баллов*) По кругу стоят 17 человек: каждый из них либо правдивый (он всегда говорит правду), либо лжец (он всегда лжёт). Все сказали, что оба соседа у них – лжецы. Какое наибольшее количество лжецов может быть в этом круге?

Ответ: 11.

Решение. Рядом с правдивым могут стоять только лжецы. Три лжеца подряд стоять не могут, поэтому между двумя любыми ближайшими правдивыми один или два лжеца. Тогда, если правдивых 5 или меньше, в промежутках между ними могут стоять в общей сложности не более 10 лжецов, то всего не более 15 человек. Получено противоречие. Тогда правдивых не меньше 6, а лжецов не больше 12, но всего 17 человек, следовательно, лжецов 11. Пример на 11 лжецов легко приводится.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Построен пример – 3 балла. Доказана оценка – 9 баллов. Названа, но не обоснована верная оценка в результате рассмотрения примеров 2 балла.

5. (15 *баллов*) Стакан до краёв наполнен солёной водой. При этом на поверхности плавает пресный лёд массой m=100 г. Какой объём ΔV воды выльется из стакана к моменту когда лёд растает? Поверхностным натяжением пренебречь. Плотность пресного льда $\rho_п$=0,9 г/см^3, плотность солёного льда $\rho_с$=0,95 г/см^3, плотность пресной воды $\rho_{пв}$=1 г/см^3, плотность солёной воды $\rho_{св}$=1,03 г/см^3. Изменением суммарного объёма при смешивании двух жидкостей пренебречь.

Ответ: ≈5,26 см^3.

Решение. Условие плавания пресного льда в солёной воде:

$$\rho_{св} g V_{погр} = mg = \rho_п g V_1, \qquad \textbf{(4 балла)}$$

где V_1 – весь объём пресного льда, $\rho_{св}$ – плотность солёной воды.

Условие плавания солёного льда такой же массы в солёной воде:

$$\rho_{св} g V_{погр} = mg = \rho_с g V_2, , \qquad \textbf{(4 балла)}$$

где V_2 – весь объём солёного льда. Солёный лед при таянии занимает ровно объём $V_{погр}$.

Лишний объём льда, который после таяния окажется за пределами стакана:

$V_1 - V_2 = \frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}$. **(3 балла)**

А с учётом того, что он растает, то объём вылившейся воды:

$\Delta V = \left(\frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}\right) \cdot \frac{\rho_п}{\rho_{пв}} \approx 5{,}26\ см^3$. **(4 балла)**

6. (10 *баллов*) Зимой, при температуре окружающего воздуха $t_о$=–20°С, каждый квадратный метр озера отдаёт в воздух 300 кДж тепла в час. Оцените через какое время после начала образования льда, на поверхность водоёма сможет выйти рыбак, если безопасная толщина льда составляет 10 см? Температура воды $t_в$=0°С. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, его удельная теплоёмкость 2100 Дж/кг·°С, плотность льда 900 кг/м^3. Скорость теплоотдачи считать постоянной.

Ответ: 105,3 часа.

Решение. Внутри образовавшегося льда температура линейно меняется от 0°С в глубине до –20°С на поверхности. То есть можно считать, что отдаваемое тепло получается за счет кристаллизации льда и его последующего охлаждения в среднем до –10°С. **(3 балла)**

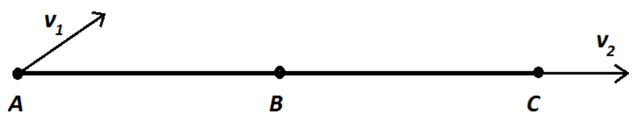
Масса квадратного метра льда, способного выдержать человека:

$m = \rho V = \rho S h = 900 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 90$ кг. **(2 балла)**

Получаем $300\,000 = \frac{Q}{t} = \frac{\lambda m + c m \Delta T}{t}$. **(3 балла)**

В результате: $t = \frac{\lambda m + c m \Delta T}{300\,000} = \frac{330\,000 \cdot 90 + 2100 \cdot 90 \cdot 10}{300\,000} = 105{,}3$ часа. **(2 балла)**

7. (15 *баллов*) Твёрдый стержень двигается по горизонтальному столу. В определённый момент времени скорость одного конца стержня v_1=10 м/с, а скорость другого v_2=6 м/с, и она направлена вдоль оси стержня (см. рисунок). Определите для этого момента времени скорость середины стержня.



Ответ: ≈7,2 м/с.

Решение. У всех точек стержня есть составляющая скорости, которая направлена направо, равная v_2. **(4 балла)**

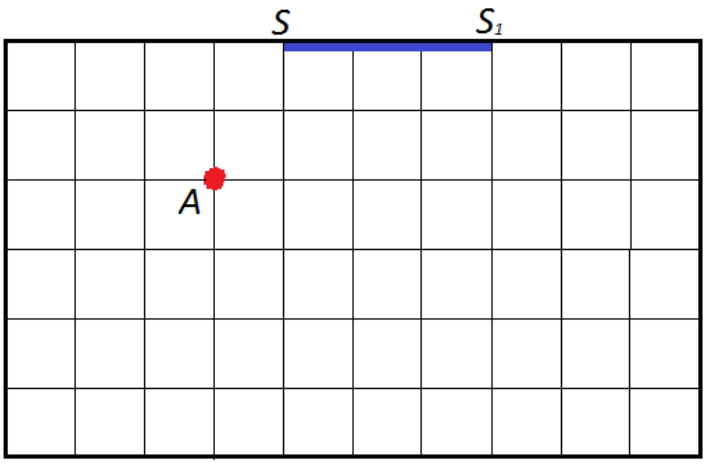
Следовательно, составляющая скорости, которая направлена вверх, для точки A: $v_{\text{верт A}} = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 8$ м/с. **(4 балла)**

Составляющая скорости точки B, которая направлена вверх:

$v_{\text{верт B}} = \frac{1}{2} v_{\text{верт A}} = 4$ м/с. **(4 балла)**

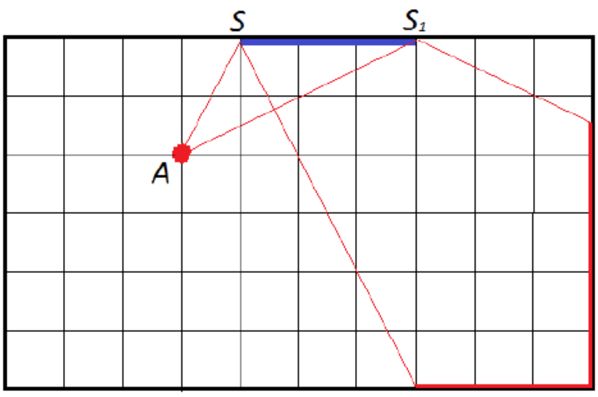
Полная скорость точки B: $v = \sqrt{v_2^2 + v_{\text{верт B}}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} \approx 7{,}2$ м/с. **(3 балла)**

8. (10 *баллов*) В прямоугольной комнате находится точечный источник света A, свет от которого падает только на плоское зеркало SS_1, которое занимает часть одной из стен в полную высоту комнаты. Определите долю стен, которые неосвещены.



Ответ: ≈0,67.

Решение. Угол падения равен углу отражения: **(2 балла)**



(3 балла)

Получаем, что отношение неосвещенной площади стен к общей площади: $\frac{21{,}5}{32} \approx 0{,}67$ **(5 баллов)**

9 класс **Заключительный тур** **2022-2023**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(7-x)^2}-\sqrt[3]{(7-x)(9+x)}+\sqrt[3]{(9+x)^2}=4.$$

Ответ: – 1.

Решение. Пусть $a=7-x,\ b=9+x$. Заметим, что $a+b=16$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}=4,\\ a+b=16.\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, используя формулу разности кубов, получим $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=4$. Возведём это равенство в квадрат, и вычтем из результата первое уравнение системы, получим $\sqrt[3]{ab}=4$.

Система $\begin{cases}\sqrt[3]{ab}=4,\\ a+b=16,\end{cases}$ сводится к квадратному уравнению. Решив его, получим $a=8;\ x=-1$. Сделаем проверку.

Критерии оценивания. За полное обоснованное решение – 12 баллов. Правильный ответ получен без обоснования (угадан) – ставим 3 балла.

2. (12 *баллов*) На перемене в кабинет математики влетела муха и стала ползать по плакату, на котором в координатной плоскости был изображён график квадратичной функции $y=f(x)$, со старшим коэффициентом равным 1. Сначала муха двигалась точно по параболе до точки с абсциссой равной 2, но затем начала двигаться по прямой пока снова не попала на параболу в точку с абсциссой равной 4. Найдите $f(3)$, если известно, что прямая $y=2023x$ пересекает путь мухи по отрезку прямой в его середине.

Ответ: 6068.

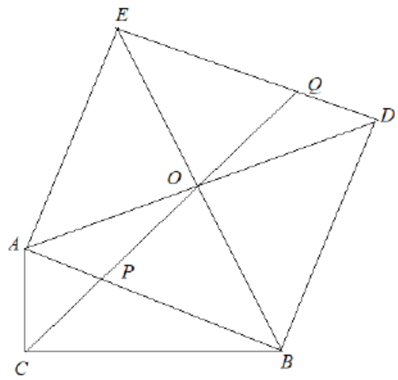
Решение. Пусть квадратичная функция имеет вид $y=x^2+bx+c$. Середина отрезка прямой имеет координаты $\left(\frac{2+4}{2};\frac{f(2)+f(4)}{2}\right)$, с другой стороны $(3;6069)$. Так как $f(2)=4+2b+c,\ f(4)=16+4b+c$, то $20+6b+2c=12138$ или $3b+c=6059$. Тогда $f(3)=9+3b+c=9+6059=6068$.

Критерии оценивания. За полное обоснованное решение – 12 баллов. При верном ходе решения имеются арифметические ошибки минус 3 балла.

3. (13 *баллов*) На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* во внешнюю сторону построен квадрат *ABDE*, *AC*=1, *BC*=4. В каком отношении делит сторону *DE* биссектриса угла *C*?

Ответ: 1:4.

Решение. Пусть *O* – центр квадрата, *P* – точка пересечения прямых *AB* и *CO*, *Q* – точка пересечения прямых *DE* и *CO*.



В четырехугольнике *ACBO* противоположные углы прямые, поэтому он вписанный. Углы $\angle OAB$ и $\angle OCB$ опираются на одну хорду *OB*, следовательно, равны, то есть $\angle OCB = \angle OAB = 45^\circ$. Поэтому *CP* – биссектриса угла *C*. По свойству биссектрисы $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{4}$. Тогда и $\frac{DQ}{QE} = \frac{1}{4}$, так как равны треугольники APO и DQO.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Показано, что четырехугольник *ACBO* вписанный – 5 баллов. Показано, что CP – биссектриса угла C ещё 3 балла, всего 8 баллов. Найдено отношение *AP* и *PB*, где *P* – точка пересечения прямых *AB* и *CO* плюс 2 балла, всего 10 баллов.

4. (13 *баллов*) В танцевальном ансамбле 8 мальчиков и 16 девочек. Некоторые из них образуют танцевальные смешанные (мальчик и девочка) пары. Известно, что в каждой паре хотя бы один из партнёров не входит ни в какую другую пару. Каково может быть наибольшее количество танцевальных пар в этом ансамбле?

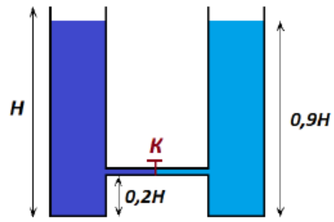
Ответ: 22.

Решение. Пример. Пусть Яна и Максим самые лучшие танцоры в ансамбле. Если Максим танцует со всеми девочками, кроме Яны, а Яна – со всеми мальчиками, кроме Максима, тот условие задачи выполнено и количество пар будет 15+7=22.

Оценка. Назовём пару, в которой партнёр не входит в другие пары – *мужской*, а пару, в которой партнёрша не входит в другие пары – *женской*. (Пара может быть и *мужской*, и *женской*). Если есть 8 мужских пар, то нет больше ни одной другой пары. Значит, если мы хотим, чтобы общее количество пар было более 8, то количество мужских пар должно быть не более 7. Если есть 16 женских пар, то также нет никаких других пар. И если мы хотим, чтобы общее количество пар было более 16, то количество женских пар должно быть не более 15. Получается, что общее количество пар (по условию каждая из них мужская или женская) не больше 7+15=22.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Только пример оценивается в 6 баллов; только оценка – в 7 баллов.

5. (15 *баллов*) Два одинаковых сосуда высотой H соединены тонкой трубкой с краном K на высоте $0{,}2H$. В левый сосуд налита вода, в правый – бензин. Уровни жидкостей одинаковы и равны $0{,}9H$. Определите уровни жидкостей в сосудах, которые установятся после открывания крана. Плотность воды 1000 кг/м^3, плотность бензина 600 кг/м^3.



Ответ: $h_{\text{лев}}=0{,}69H$; $h_{\text{пр}}=H$.

Решение. При открытии крана вода начнёт перетекать в правый сосуд. Возможны несколько ситуаций. **(1 балл)**

<u>Первая:</u> вода не дойдёт до трубки, бензин не выльется из сосуда. **(1 балл)**

Условие равновесия на уровне трубки: $\rho_{\text{воды}} g(0{,}7H - x) = \rho_{\text{бензина}} g(0{,}7H + x)$,
(1 балл)

где x – насколько уменьшился уровень воды в левом сосуде.

Получаем, $x = 0{,}175H$, то есть эта ситуация не работает. **(2 балла)**

<u>Вторая:</u> вода до трубки в правом сосуде не дошла, но часть бензина вылилась.
(1 балл)

Условие равновесия в этом случае: $\rho_{\text{воды}} g(0{,}7H - x) = \rho_{\text{бензина}} g \cdot 0{,}8H$. **(1 балл)**

Получаем, $x = 0{,}22H$, то есть и эта ситуация не работает. **(2 балла)**

<u>Третья:</u> вода дойдёт до трубки и при этом часть бензина выливается. **(1 балл)**

Условие равновесия в этом случае: $\rho_{\text{воды}} g(0{,}7H - x) = \rho_{\text{воды}} g(x - 0{,}2H) + \rho_{\text{бензина}} g(H - x)$. **(1 балл)**

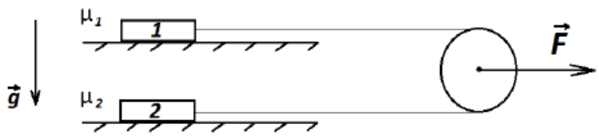
Получаем, $x = \frac{3}{14} H$. **(2 балла)**

Уровень в левом сосуде: $h_{\text{лев}} = 0{,}9H - \frac{3}{14} H = \frac{24}{35} H \approx 0{,}69H$. **(1 балл)**

Уровень в правой трубке: $h_{\text{пр}} = H$. **(1 балл)**

Замечание. В решении должны быть рассмотрены все возможные ситуации.

6. (10 *баллов*) На двух горизонтальных полках располагаются два груза с массами m_1=2 кг и m_2=3 кг, соединённые невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый гладкий блок. Коэффициенты трения грузов о полки μ_1=0,1 и μ_2=0,2. К центру блока прикладывают горизонтально направленную силу F=10 Н. Определите ускорения грузов и центра масс этой системы тел. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



Ответ: a_1=1,5 м/с^2, a_2=0 м/с^2, a=0,6 м/с^2.

Решение. Так как блок невесомый, то сила натяжения нити $T = \frac{F}{2} = 5$ Н. **(2 балла)**

Сила трения скольжения для первого тела:

$F_{\text{тр }1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g = 0{,}1 \cdot 2 \cdot 10 = 2$ Н. **(1 балл)**

Сила трения скольжения для второго тела:

$F_{\text{тр }2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g = 0{,}2 \cdot 3 \cdot 10 = 6$ Н. **(1 балл)**

Следовательно, второе тело стоит на месте: $a_2 = 0$ м/с^2. **(2 балла)**

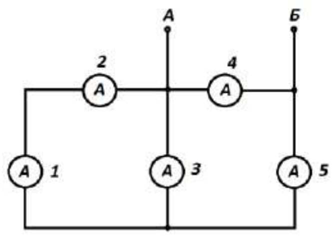
Второй закон Ньютона для первого тела: $T - F_{\text{тр }1} = m_1 a_1$,

ускорение первого тела: $a_1 = \frac{T - F_{\text{тр }1}}{m_1} = \frac{5-2}{2} = 1{,}5$ м/с^2. **(2 балла)**

Ускорение центра масс: $a = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1{,}5 + 0}{2+3} = 0{,}6$ м/с^2. **(2 балла)**

7. (10 *баллов*) Пять одинаковых неидеальных амперметров соединены так, как показано на рисунке. К точкам A и $Б$ подсоединяют идеальный источник питания.

Определите сумму показаний всех амперметров, если известно, что показания первого амперметра I_1=2 мА.



Ответ: 24 мА.

Решение. В результате анализа предложенной электрической цепи можно сделать вывод, что $I_2 = I_1 = 2$ мА. **(2 балла)**

$I_3 = 2I_1 = 4$ мА. **(2 балла)**

$I_5 = I_3 + I_1 = 6$ мА. **(2 балла)**

$I_4 = \frac{5}{3} I_5 = 10$ мА. **(2 балла)**

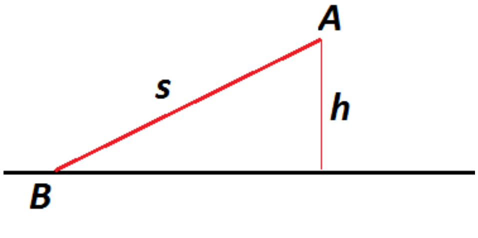
Сумма показаний всех амперметров: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 24$ мА. **(2 балла)**

8. (15 *баллов*) Комар двигался над водой по прямой с постоянной скоростью v=1 м/с и в конце движения сел на поверхность воды. За 5 с до посадки он находился на высоте h=3 м от поверхности воды. Косинус угла падения солнечных лучей на поверхность воды равен 0,6. Падающий солнечный луч, благодаря которому образуется тень комара, и его траектория лежат в одной вертикальной плоскости. Определите скорость, с которой двигалась тень комара по дну водоема.

Ответ: 0 м/с или 1,6 м/с.

Решение. Комар пролетел до посадки $s = vt = 1 \cdot 5 = 5$ м. **(2 балла)**

То есть двигался по траектории *AB*.

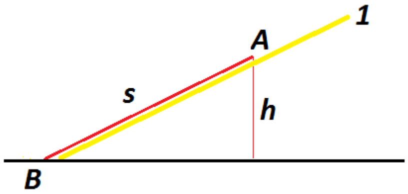


Косинус угла между траекторией и поверхностью воды равен 0,8. **(2 балла)**

Очевидно, что скорость движения тени по дну совпадает со скоростью движения тени по поверхности водоёма. **(3 балла)**

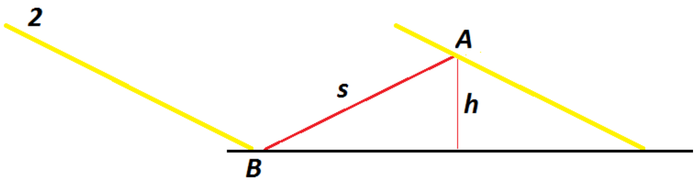
Так как угол падения солнечных лучей совпадает с углом между траекторией и поверхностью воды, то возможны два варианта. **(2 балла)**

Первый – комар двигается вдоль солнечного луча.



Скорость тени по дну водоема $v_{\text{тени}} = 0$ м/с. **(3 балла)**

Второй – комар летит навстречу солнечному лучу.



Скорость тени: $v_{\text{тени}} = 2v\cos\beta = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}8 = 1{,}6$ м/с. **(3 балла)**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(9-x)^2}-\sqrt[3]{(9-x)(7+x)}+\sqrt[3]{(7+x)^2}=4.$$

Ответ: 1.

Решение. Пусть $a=9-x,\ b=7+x$. Заметим, что $a+b=16$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}=4,\\ a+b=16.\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, используя формулу разности кубов, получим $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=4$. Возведём это равенство в квадрат, и вычтем из результата первое уравнение системы, получим $\sqrt[3]{ab}=4$.

Система $\begin{cases}\sqrt[3]{ab}=4,\\ a+b=16,\end{cases}$ сводится к квадратному уравнению. Решив его, получим $a=8;\ x=1$. Сделаем проверку.

Критерии оценивания. За полное обоснованное решение – 12 баллов. Правильный ответ получен без обоснования (угадан) – ставим 3 балла.

2. (12 *баллов*) На перемене в кабинет математики влетела муха и стала ползать по плакату, на котором в координатной плоскости был изображён график квадратичной функции $y=f(x)$, со старшим коэффициентом равным -1. Сначала муха двигалась точно по параболе до точки с абсциссой равной 2, но затем начала двигаться по прямой пока снова не попала на параболу в точку с абсциссой равной 4. Найдите $f(3)$, если известно, что прямая $y=2023x$ пересекает путь мухи по отрезку прямой в его середине.

Ответ: 6070.

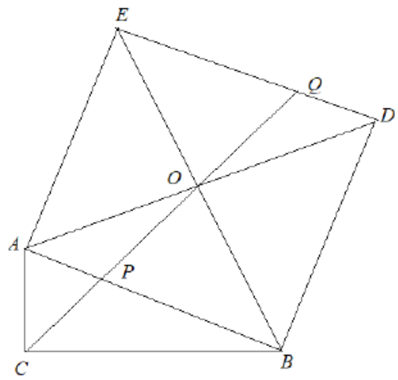
Решение. Пусть квадратичная функция имеет вид $y=-x^2+bx+c$. Середина отрезка прямой имеет координаты $\left(\frac{2+4}{2};\frac{f(2)+f(4)}{2}\right)$, с другой стороны $(3;6069)$. Так как $f(2)=-4+2b+c,\ f(4)=-16+4b+c$, то $-20+6b+2c=12138$ или $3b+c=6079$. Тогда $f(3)=-9+3b+c=-9+6079=6070$.

Критерии оценивания. За полное обоснованное решение – 12 баллов. При верном ходе решения имеются арифметические ошибки минус 3 балла.

3. (13 *баллов*) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат $ABDE$, AC=2, BC=5. В каком отношении делит сторону DE биссектриса угла C?

Ответ: 2:5.

Решение. Пусть O – центр квадрата, P – точка пересечения прямых AB и CO, Q – точка пересечения прямых DE и CO.



В четырехугольнике $ACBO$ противоположные углы прямые, поэтому он вписанный. Углы $\angle OAB$ и $\angle OCB$ опираются на одну хорду OB, следовательно, равны, то есть $\angle OCB = \angle OAB = 45^\circ$. Поэтому CP – биссектриса угла C. По свойству биссектрисы $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$. Тогда и $\frac{DQ}{QE} = \frac{2}{5}$, так как равны треугольники APO и DQO.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Показано, что четырехугольник $ACBO$ вписанный – 5 баллов. Показано, что CP – биссектриса угла C ещё 3 балла, всего 8 баллов. Найдено отношение AP и PB, где P – точка пересечения прямых AB и CO плюс 2 балла, всего 10 баллов.

4. (13 *баллов*) В танцевальном ансамбле 8 мальчиков и 20 девочек. Некоторые из них образуют танцевальные смешанные (мальчик и девочка) пары. Известно, что в каждой паре хотя бы один из партнёров не входит ни в какую другую пару. Каково может быть наибольшее количество танцевальных пар в этом ансамбле?

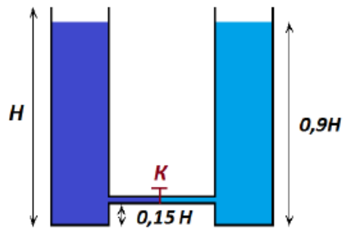
Ответ: 26.

Решение. Пример. Пусть Яна и Максим самые лучшие танцоры в ансамбле. Если Максим танцует со всеми девочками, кроме Яны, а Яна – со всеми мальчиками, кроме Максима, тот условие задачи выполнено и количество пар будет 19+7=26.

Оценка. Назовём пару, в которой партнёр не входит в другие пары – *мужской*, а пару, в которой партнёрша не входит в другие пары – *женской*. (Пара может быть и *мужской*, и *женской*). Если есть 8 мужских пар, то нет больше ни одной другой пары. Значит, если мы хотим, чтобы общее количество пар было более 8, то количество мужских пар должно быть не более 7. Если есть 20 женских пар, то также нет никаких других пар. И если мы хотим, чтобы общее количество пар было более 20, то количество женских пар должно быть не более 19. Получается, что общее количество пар (по условию каждая из них мужская или женская) не больше 7+19=26.

Критерии оценивания. Полное решение – 13 баллов. Только пример оценивается в 6 баллов; только оценка – в 7 баллов.

5. (15 *баллов*) Два одинаковых сосуда высотой H соединены тонкой трубкой с краном K на высоте $0{,}15H$. В левый сосуд налита вода, в правый – бензин. Уровни жидкостей одинаковы и равны $0{,}9H$. Определите уровни жидкостей в сосудах, которые установятся после открывания крана. Плотность воды 1000 кг/м^3, плотность бензина 600 кг/м^3.



Ответ: $h_{\text{лев}}=0{,}69H$; $h_{\text{пр}}=H$.

Решение. При открытии крана вода начнёт перетекать в правый сосуд. Возможны несколько ситуаций. **(1 балл)**

<u>Первая:</u> вода не дойдёт до трубки, бензин не выльется из сосуда. **(1 балл)**

Условие равновесия на уровне трубки:

$$\rho_{\text{воды}} g(0{,}75H - x) = \rho_{\text{бензина}} g(0{,}75H + x),$$ **(1 балл)**

где x – насколько уменьшился уровень воды в левом сосуде.

Получаем $x = 0{,}1875H$, то есть эта ситуация не работает. **(2 балла)**

<u>Вторая:</u> вода до трубки в правом сосуде не дошла, но часть бензина вылилась. **(1 балл)**

Условие равновесия в этом случае: $\rho_{\text{воды}} g(0{,}75H - x) = \rho_{\text{бензина}} g \cdot 0{,}75H.$ **(1 балл)**

Получаем $x = 0{,}3H$, то есть и эта ситуация не работает. **(2 балла)**

Третья: вода дойдёт до трубки и при этом часть бензина выливается. **(1 балл)**

Условие равновесия в этом случае:

$\rho_{\text{воды}} g(0{,}75H - x) = \rho_{\text{воды}} g(x - 0{,}15H) + \rho_{\text{бензина}} g(H - x).$ **(1 балл)**

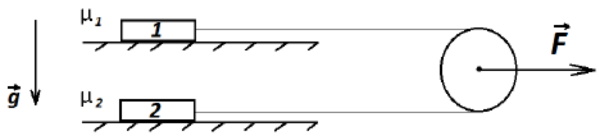
Получаем $x = \frac{3}{14}H.$ **(2 балла)**

Уровень в левом сосуде $h_{\text{лев}} = 0{,}9H - \frac{3}{14}H = \frac{24}{35}H \approx 0{,}69H.$ **(1 балл)**

Уровень в правой трубке: $h_{\text{пр}} = H.$ **(1 балл)**

Замечание. В решении должны быть рассмотрены все возможные ситуации.

6. (10 *баллов*) На двух горизонтальных полках располагаются два груза с массами m_1=1 кг и m_2=10 кг, соединённые невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый гладкий блок. Коэффициенты трения грузов о полки μ_1=0,3 и μ_2=0,1. К центру блока прикладывают горизонтально направленную силу F=20 Н. Определите ускорения грузов и центра масс этой системы тел. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



Ответ: a_1=7 м/с^2, a_2=0 м/с^2, a=0,64 м/с^2.

Решение. Так как блок невесомый, то сила натяжения нити: $T = \frac{F}{2} = 10$ Н.
(2 балла)

Сила трения скольжения для первого тела:

$F_{\text{тр }1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g = 0{,}3 \cdot 1 \cdot 10 = 3$ Н. **(1 балл)**

Сила трения скольжения для второго тела:

$F_{\text{тр }2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 10 = 10$ Н. **(1 балл)**

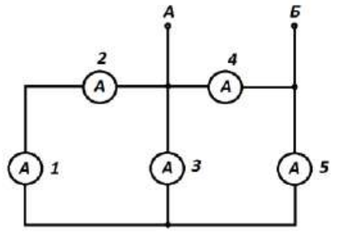
Следовательно, второе тело стоит на месте: $a_2 = 0$ м/с^2. **(2 балла)**

Второй закон Ньютона для первого тела: $T - F_{\text{тр }1} = m_1 a_1$,

ускорение первого тела: $a_1 = \frac{T - F_{\text{тр }1}}{m_1} = \frac{10-3}{1} = 7$ м/с^2. **(2 балла)**

Ускорение центра масс $a = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 7 + 0}{1+10} = 0{,}64$ м/с^2. **(2 балла)**

7. (10 *баллов*) Пять одинаковых неидеальных амперметров соединены так, как показано на рисунке. К точкам *А* и *Б* подсоединяют идеальный источник питания. Определите сумму показаний всех амперметров, если известно, что показания второго амперметра I_2=4 мА.



Ответ: 48 мА.

Решение. В результате анализа предложенной электрической цепи можно сделать вывод, что $I_2 = I_1 = 4$ мА. **(2 балла)**

$I_3 = 2I_1 = 8$ мА. **(2 балла)**

$I_5 = I_3 + I_1 = 12$ мА. **(2 балла)**

$I_4 = \frac{5}{3} I_5 = 20$ мА. **(2 балла)**

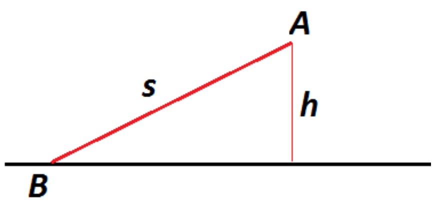
Сумма показаний всех амперметров $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 48$ мА. **(2 балла)**

8. (15 *баллов*) Комар двигался над водой по прямой с постоянной скоростью v=0,5 м/с и в конце движения сел на поверхность воды. За 20 с до посадки он находился на высоте h=6 м от поверхности воды. Косинус угла падения солнечных лучей на поверхность воды равен 0,6. Падающий солнечный луч, благодаря которому образуется тень комара, и его траектория лежат в одной вертикальной плоскости. Определите скорость, с которой двигалась тень комара по дну водоема.

Ответ: 0 м/с или 0,8 м/с.

Решение. Комар пролетел до посадки $s = vt = 0{,}5 \cdot 20 = 10$ м. **(2 балла)**

То есть двигался по траектории *AB*.

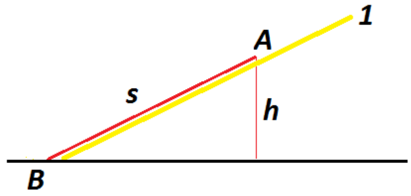


Косинус угла между траекторией и поверхностью воды равен 0,8. **(2 балла)**

Очевидно, что скорость движения тени по дну совпадает со скоростью движения тени по поверхности водоёма. **(3 балла)**

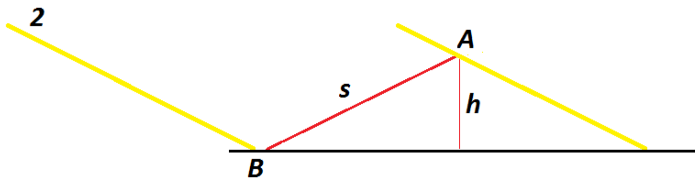
Так как угол падения солнечных лучей совпадает с углом между траекторией и поверхностью воды, то возможны два варианта. **(2 балла)**

Первый – комар двигается вдоль солнечного луча.



Скорость тени по дну водоема $v_{\text{тени}} = 0\ \text{м/с}$. **(3 балла)**

Второй – комар летит навстречу солнечному лучу.



Скорость тени $v_{\text{тени}} = 2v\cos\beta = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}8\ \text{м/с}$. **(3 балла)**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (10 *баллов*) Петя сложил несколько идущих последовательно чётных чисел. Оказалось, что полученная сумма в **30** раз больше наибольшего слагаемого и в **90** раз больше наименьшего. Найдите, какие числа сложил Петя.

Ответ: 44, 46, 48, …, 132.

Решение. Пусть первое число n, а последнее $n+2k$. Всего чисел $k+1$. Числа образуют арифметическую прогрессию, сумма которой равна $(n+k)(k+1)$. Получаем систему $\begin{cases}(n+k)(k+1)=30(n+2k),\\ (n+k)(k+1)=90n.\end{cases}$ Вычитая уравнения, получаем $k=n$. Тогда последнее уравнение примет вид $2k(k+1)=90k$, откуда $k=44$. Итак, искомые числа 44, 46,…, 132.

Критерии оценивания. Правильное обоснованное решение – 10 баллов. Получена верная система – 6 баллов. Задача решена, но имеются арифметические ошибки – минус 2 балла.

2. (12 *баллов*) Последовательность функций задана формулами:

$$f_0(x)=2\sqrt{x},\ f_{n+1}(x)=\frac{4}{2-f_n(x)},\ n=0,1,2\ \ldots,\ \ x\in[4;9].$$

Найдите $f_{2023}(4)$.

Ответ: – 2.

Решение. Легко вычислить, что $f_3(x)=f_0(x)$, поэтому

$$f_{2023}(x)=f_1(x)=\frac{2}{1-\sqrt{x}}.$$

Тогда $f_{2023}(4)=-2.$

Замечание. Можно сразу вычислять значения функций в данной точке. Получится последовательность $f_0(4)=4,\ f_1(4)=-2,\ f_2(4)=1,\ f_3(4)=4\ \ldots$

Критерии оценивания. Полное обоснованное решение – 12 баллов. Ошибки в счёте – минус 1 балл. Найдено соотношение $f_3(x)=f_0(x)$ – 7 баллов, найдено равенство $f_{2023}(x)=f_1(x)$ – ещё 4 балла.

3. (15 *баллов*) Вершины ломаной $ABCDEFG$ имеют координаты

$$A(-1;-7),\ B(2;5),\ C(3;-8),\ D(-3;4),\ E(5;-1),\ F(-4;-2),\ G(6;4).$$

Найдите сумму углов с вершинами в точках B, E, C, F, D.

Ответ: 135°.

Решение. Замкнутая ломаная $BCDEFB$ образует пятиконечную «звезду». Сумма углов в лучах этой звезды равна 180°.

Докажем, что сумма углов в лучах любой пятиконечной звезды $BCDEFB$ равна 180°. Пусть O – точка пересечения прямых BF и ED, угол между ними $BOD = \alpha$. Обозначим угол в луче той же буквой, что и вершину луча.

$$\angle E + \angle F = 180^{\circ} - \alpha = \angle OBD + \angle ODB.$$

Имеем:

$$180^{\circ} = \angle C + \angle CBD + \angle CDB = \angle C + (\angle B + \angle OBD) + (\angle D + \angle ODB) =$$
$$= \angle C + \angle B + \angle D + (\angle OBD + \angle ODB) = \angle C + \angle B + \angle D + \angle E + \angle F.$$

Другое доказательство. Пусть луч $\bar{a}$ совпадает с лучом BC. Повернем луч $\bar{a}$ до совмещения с лучом BF. Луч $\bar{a}$ повернется на угол $\angle B$. Затем повернем луч $\bar{a}$ (в новом положении) до совмещения с лучом EF. Луч $\bar{a}$ повернется еще на угол $\angle F$, а с начала движения – на угол $\angle B + \angle F$. Затем снова повернем луч $\bar{a}$, теперь до совмещения с лучом ED. Луч $\bar{a}$ повернется еще на угол $\angle D$, а с начала движения – на угол $\angle B + \angle F + \angle E$. Выполнив еще два аналогичных поворота, получим, что луч $\bar{a}$ совпадет с лучом CB, т.е. повернется с начала движения на 180° и, в то же время, на сумму углов $\angle B + \angle F + \angle E + \angle D + \angle C$.

Точка пересечения отрезков AB и FG – это точка $K(1;1)$.

Докажем это. Пусть $L(1;-2)$, $M(6;-2)$. Тогда $\triangle KFL \sim \triangle GFM$, так как их катеты пропорциональны. Следовательно, $\angle KFL = \angle GFM$, поэтому $K \in FG$. Аналогично, $K \in AB$.

Другой способ. Уравнение прямой $AB: y = 4x - 3$. Уравнение прямой $FG: y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$. Решая систему из этих двух уравнений, получим координаты точки пересечения этих прямых: $(1;1)$.

Найдем длины сторон ΔBKG: $BK = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$, $BG = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$, $GK = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$. Треугольник BKG равнобедренный и по обратной теореме Пифагора – прямоугольный.

Следовательно, угол $\angle BKG = 45^\circ$. Он внешний угол для ΔFKB и $\angle KFB + \angle KBF = 45^\circ$. Так как $\angle ABC = \angle FBC - \angle FBA$, $\angle EFG = \angle EFB - \angle GFB$, то искомая сумма углов

$$\angle ABC + \angle EFG + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF =$$
$$= \angle FBC + \angle EFB - \left(\angle FBA + \angle GFB\right) + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF =$$
$$= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Замечание. Можно получить похожее решение, исходя из факта, что сумма углов в лучах любой семиконечной «звезды» тоже равна 180° (доказательство по сути не отличается от второго доказательства для пятиконечной). Так как угол $\angle BKG = 45^\circ$, то сумма двух углов семиконечной звезды с вершинами в точках A и G равна 45°.

Критерии оценивания. Полное решение 15 баллов. Если координаты точки K найдены из чертежа или угаданы – минус 2 балла. Если факт, что $\angle BKG = 45^\circ$, найден из чертежа или угадан – минус 3 балла. Если задача не решена, но показано, что сумма всех углов в лучах пяти- или семиконечной звезды равна 180°, то 8 баллов.

4. (13 *баллов*) Участник соревнований по триатлону на первом этапе плыл 1 км. На втором ехал на велосипеде 25 км, на третьем бежал 4 км. Всю дистанцию он преодолел за 1 час 15 мин. Перед соревнованиями он опробовал трассу: плыл $1/16$ часа, ехал на велосипеде и бежал по $1/49$ часа, пройдя в сумме $5/4$ км. На соревнованиях каждый этап он проходил с той же скоростью, что и на тренировке. Сколько времени он ехал на велосипеде и с какой скоростью?

Ответ: 5/7 часа; 35 км/час.

Решение. Пусть v_1, v_2, v_3 – скорости спортсмена на этапах 1, 2, 3 соответственно. Из условия следует: $\frac{1}{v_1} + \frac{25}{v_2} + \frac{4}{v_3} = \frac{5}{4}$ часа; $\frac{1}{16}v_1 + \frac{1}{49}v_2 + \frac{1}{49}v_3 = \frac{5}{4}$ км. Складывая эти уравнения и учитывая, что для любых положительных чисел x, y выполнено неравенство $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (1), получим:

$$\frac{5}{2} = \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{16}v_1\right) + \left(\frac{25}{v_2} + \frac{1}{49}v_2\right) + \left(\frac{4}{v_3} + \frac{1}{49}v_3\right) \geq$$

$$\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{1}{16}}+2\sqrt{25\cdot\frac{1}{49}}+2\sqrt{4\cdot\frac{1}{49}}=2\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{2}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда слагаемые в левой части неравенства (1) равны. Следовательно,

$$\frac{1}{v_1}=\frac{1}{16}v_1;\quad \frac{25}{v_2}=\frac{1}{49}v_2;\quad \frac{4}{v_3}=\frac{1}{49}v_3$$

то есть $v_1 = 4\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_2 = 35\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_3 = 14\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Критерии оценивания. Получен верный ответ при полном обосновании – 13 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла. Получена верная система уравнений – 2 балла (по 1 баллу за каждое). Использовано неравенство (1) или равносильное и получено следствие (2) – ещё 6 баллов (всего 8). Сделан вывод, что во всех трёх случаях в (1) имеет место равенство – ещё 4 балла (всего 12 баллов).

5. (10 *баллов*) Небольшая вагонетка с реактивным двигателем стоит на рельсах. Рельсы уложены в форме окружности радиусом R=4 м. Вагонетка стартует с места, при этом реактивная сила имеет постоянное значение. До какой максимальной скорости вагонетка разгонится за один полный круг, если её ускорение за этот промежуток времени не должно превысить значение a=2 м/с^2?

Ответ: ≈0,795 м/с.

Решение. Ускорение разгона вагонетки: $a_1 = \frac{v^2}{2S} = \frac{v^2}{4\pi R}$. **(3 балла)**

Кроме того, у вагонетки присутствует центростремительное ускорение:

$a_2 = \frac{v^2}{R}$. **(1 балл)**

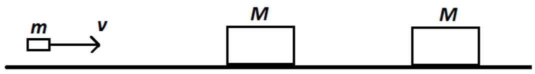
Полное ускорение вагонетки: $a^2 = a_1^2 + a_2^2 = \left(\frac{v^2}{4\pi R}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2$. **(3 балла)**

Получаем, что конечная скорость вагонетки не может быть больше чем:

$v_{max} = \sqrt[4]{\frac{16\pi^2R^2a^2}{(16\pi^2+1)^2}}$. **(2 балла)**

В результате получаем $v_{max} \approx 0{,}795$ м/с. **(1 балл)**

6. (10 *баллов*) На горизонтальной поверхности располагаются два одинаковых небольших неподвижных бруска массами M каждый. Расстояние между ними S. В левый брусок попадает и застревает в нём горизонтально летящая пуля массой m. Какой должна быть скорость пули, чтобы конечное расстояние между брусками было также равно S. Столкновение между брусками абсолютно упругое. Масса пули намного меньше массы бруска $m<<M$. Коэффициент трения между брусками и горизонтальной поверхностью μ, ускорение свободного падения g.



Ответ: $v = \frac{2M}{m}\sqrt{\mu g S}$.

Решение. Закон сохранения импульса для столкновения пули с левым бруском: $mv = (M+m)u = Mu$. **(2 балла)**

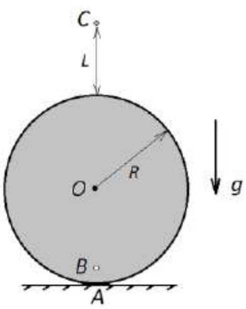
В случае абсолютно упругого удара между телами одинаковой массы происходит «обмен скоростями». **(3 балла)**

Закон сохранения энергии для последующего движения брусков:

$\frac{Mu^2}{2} = A_{\text{тр}} = 2\mu MgS$. **(3 балла)**

В результате, скорость пули: $v = \frac{2M}{m}\sqrt{\mu g S}$. **(2 балла)**

7. (15 *баллов*) Равномерно заряженный по объёму шар радиусом R закреплён на горизонтальной поверхности в точке A. Заряд шара Q. В точке C, которая располагается на расстоянии L от поверхности шара, парит заряженный шарик радиусом r и массой m. Его заряд q. Известно, что $r<<R$. Определите ускорение шарика сразу после того, как в точке B удалили часть материала. Известно, что $AB=S$. Удалённый материал представляет собой шарик радиусом r. Точки A, B, C, O располагаются на одной вертикали. Ускорение свободного падения g.



Ответ: $a = \frac{kqQr^3}{mR^3(L+2R-S)^2}$.

Решение. В начальном состоянии для шарика: $F_э = mg$. **(2 балла)**

В конечном состоянии для шарика: $F_э - mg - F_{удал} = -ma$, **(2 балла)**

где $F_{удал} = k\frac{qq_{удал}}{(L+2R-S)^2}$. **(4 балла)**

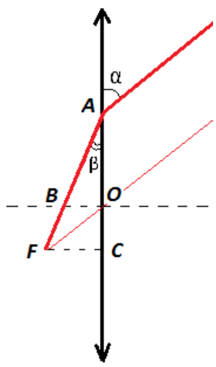
Удалённый заряд: $q_{удал} = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$. **(4 балла)**

В итоге получаем $a = \frac{kqQr^3}{mR^3(L+2R-S)^2}$. **(3 балла)**

8. (15 *баллов*) Тонкий луч света падает на тонкую собирающую линзу на расстоянии x=10 см от её оптического центра. Угол между падающим лучом и плоскостью линзы α=45°, между преломлённым лучом и плоскостью линзы β=30°. Определите её фокусное расстояние.

Ответ: ≈13,7 см.

Решение. Параллельные лучи пересекаются в фокусе, поэтому F – фокус данной линзы. **(3 балла)**



В треугольнике OAF: угол FAO=30°, угол OFA=15°, угол AOF=135°. **(4 балла)**

Следовательно, $\frac{OF}{\sin 30°} = \frac{AO}{\sin 15°}$. **(4 балла)**

Получаем, что фокусное расстояние:

$FC = OF\sin 45° = AO\frac{\sin 30°}{\sin 15°}\sin 45° \approx 13{,}7$ см. **(4 балла)**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (10 *баллов*) Петя сложил несколько идущих последовательно нечётных чисел. Оказалось, что полученная сумма в **20** раз больше наибольшего слагаемого и в **60** раз больше наименьшего. Найдите, какие числа сложил Петя.

Ответ: 29, 31, 33, …, 87.

Решение. Пусть первое число n, а последнее $n+2k$. Всего чисел $k+1$. Числа образуют арифметическую прогрессию, сумма которой равна $(n+k)(k+1)$. Получаем систему $\begin{cases}(n+k)(k+1)=20(n+2k),\\ (n+k)(k+1)=60n.\end{cases}$ Вычитая уравнения, получаем $k=n$. Тогда последнее уравнение примет вид $2k(k+1)=60k$, откуда $k=29$. Итак, искомые числа 29, 31,…, 87.

Критерии оценивания. Получена верная система – 6 баллов, правильное обоснованное решение – 10 баллов; имеются арифметические ошибки – минус 2 балла.

2. (12 *баллов*) Последовательность функций задана формулами:

$$f_0(x)=2\sqrt{x},\ f_{n+1}(x)=\frac{4}{2-f_n(x)},\ n=0,1,2\ldots,\ \ x\in[4;9].$$

Найдите $f_{2023}(9)$.

Ответ: – 1.

Решение. Легко вычислить, что $f_3(x)=f_0(x)$, поэтому

$$f_{2023}(x)=f_1(x)=\frac{2}{1-\sqrt{x}}.$$

Тогда $f_{2023}(9)=-1$.

Замечание. Можно сразу вычислять значения функций в данной точке. Получится последовательность $f_0(9)=6$, $f_1(9)=-1$, $f_2(9)=\frac{4}{3}$, $f_3(9)=6\ldots$

Критерии оценивания. Полное обоснованное решение – 12 баллов. Ошибки в счёте – минус 1 балл. Найдено соотношение $f_3(x)=f_0(x)$ – 7 баллов, найдено равенство $f_{2023}(x)=f_1(x)$ – ещё 4 балла.

3. (15 *баллов*) Вершины ломаной $ABCDEFG$ имеют координаты $A(0;-5)$, $B(3;7)$, $C(4;-6)$, $D(-2;6)$, $E(6;1)$, $F(-3;0)$, $G(7;6)$.

Найдите сумму углов с вершинами в точках B, E, C, F, D.

Ответ: 135°.

Решение. Замкнутая ломаная $BCDEFB$ образует пятиконечную «звезду». Сумма углов в лучах этой звезды равна 180°.

Докажем, что сумма углов в лучах любой пятиконечной звезды $BCDEFB$ равна 180°. Пусть O – точка пересечения прямых BF и ED, угол между ними $BOD=\alpha$. Обозначим угол в луче той же буквой, что и вершину луча.

$$\angle E+\angle F=180^{\circ}-\alpha=\angle OBD+\angle ODB.$$

Поэтому

$$180^{\circ}=\angle C+\angle CBD+\angle CDB=\angle C+(\angle B+\angle OBD)+(\angle D+\angle ODB)=$$
$$=\angle C+\angle B+\angle D+(\angle OBD+\angle ODB)=\angle C+\angle B+\angle D+\angle E+\angle F.$$

Другое доказательство. Пусть луч $\bar{a}$ совпадает с лучом BC. Повернем луч $\bar{a}$ до совмещения с лучом BF. Луч $\bar{a}$ повернется на угол $\angle B$. Затем повернем луч $\bar{a}$ (в новом положении) до совмещения с лучом EF. Луч $\bar{a}$ повернется еще на угол $\angle F$, а с начала движения – на угол $\angle B+\angle F$. Затем снова повернем луч $\bar{a}$, теперь до совмещения с лучом ED. Луч $\bar{a}$ повернется еще на угол $\angle D$, а с начала движения – на угол $\angle B+\angle F+\angle E$. Выполнив еще два аналогичных поворота, получим, что луч $\bar{a}$ совпадет с лучом CB, т.е. повернется с начала движения на 180° и, в то же время, на сумму углов $\angle B+\angle F+\angle E+\angle D+\angle C$.

Точка пересечения отрезков AB и FG – это точка $K(2;3)$.

Докажем это. Пусть $L(2;0)$, $M(7;0)$. Тогда $\triangle KFL \sim \triangle GFM$, так как их катеты пропорциональны. Следовательно, $\angle KFL=\angle GFM$, поэтому $K\in FG$. Аналогично, $K\in AB$.

Другой способ. Уравнение прямой $AB: y=4x-5$. Уравнение прямой $FG: y=\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$. Решая систему из этих двух уравнений, получим координаты точки пересечения этих прямых: $(2;3)$.

Найдем длины сторон ΔBKG: $BK=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$, $BG=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$, $GK=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$. Треугольник BKG равнобедренный и по обратной теореме Пифагора – прямоугольный.

Следовательно, угол $\angle BKG = 45^{\circ}$. Он внешний угол для ΔFKB и $\angle KFB + \angle KBF = 45^{\circ}$. Так как $\angle ABC = \angle FBC - \angle FBA$, $\angle EFG = \angle EFB - \angle GFB$, то искомая сумма углов

$$\angle ABC + \angle EFG + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF =$$

$$= \angle FBC + \angle EFB - \left(\angle FBA + \angle GFB\right) + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF =$$

$$= 180^{\circ} - 45^{\circ} = 135^{\circ}.$$

Замечание. Можно получить похожее решение, исходя из факта, что сумма углов в лучах любой семиконечной «звезды» тоже равна 180° (доказательство, по сути, не отличается от второго доказательства для пятиконечной). Так как угол $\angle BKG = 45^{\circ}$, то сумма двух углов семиконечной звезды с вершинами в точках A и G равна 45°.

Критерии оценивания. Полное решение 15 баллов. Если координаты точки K найдены из чертежа или угаданы – минус 2 балла. Если факт, что $\angle BKG = 45^{\circ}$, найден из чертежа или угадан – минус 3 балла. Если задача не решена, но показано, что сумма всех углов в лучах пяти- или семиконечной звезды равна 180°, то 8 баллов.

4. (13 *баллов*) Участник соревнований по триатлону на первом этапе плыл 1 км. На втором ехал на велосипеде 25 км, на третьем бежал 4 км. Всю дистанцию он преодолел за 1 час 15 мин. Перед соревнованиями он опробовал трассу: плыл $1/16$ часа, ехал на велосипеде и бежал по $1/49$ часа, пройдя в сумме $5/4$ км. На соревнованиях каждый этап он проходил с той же скоростью, что и на тренировке. Сколько времени он бежал и с какой скоростью?

Ответ: $2/7$ часа; 14 км/час.

Решение. Пусть v_1, v_2, v_3 – скорости спортсмена на этапах 1, 2, 3 соответственно. Из условия следует: $\frac{1}{v_1} + \frac{25}{v_2} + \frac{4}{v_3} = \frac{5}{4}$ часа; $\frac{1}{16}v_1 + \frac{1}{49}v_2 + \frac{1}{49}v_3 = \frac{5}{4}$ км. Складывая эти уравнения и учитывая, что для любых положительных чисел x, y выполнено неравенство $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (1), получим:

$$\frac{5}{2} = \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{16}v_1\right) + \left(\frac{25}{v_2} + \frac{1}{49}v_2\right) + \left(\frac{4}{v_3} + \frac{1}{49}v_3\right) \geq$$

$$\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{1}{16}}+2\sqrt{25\cdot\frac{1}{49}}+2\sqrt{4\cdot\frac{1}{49}}=2\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{2}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда слагаемые в левой части неравенства (1) равны. Следовательно,

$$\frac{1}{v_1}=\frac{1}{16}v_1;\quad \frac{25}{v_2}=\frac{1}{49}v_2;\quad \frac{4}{v_3}=\frac{1}{49}v_3$$

то есть $v_1 = 4\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_2 = 35\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_3 = 14\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Критерии оценивания. Получен верный ответ при полном обосновании – 13 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 2 балла. Получена верная система уравнений – 2 балла (по 1 баллу за каждое). Использовано неравенство (1) или равносильное и получено следствие (2) – ещё 6 баллов (всего 8). Сделан вывод, что во всех трёх случаях в (1) имеет место равенство – ещё 4 балла (всего 12 баллов).

5. (10 *баллов*) Небольшая вагонетка с реактивным двигателем стоит на рельсах. Рельсы уложены в форме окружности радиусом R=5 м. Вагонетка стартует с места, при этом реактивная сила имеет постоянное значение. До какой максимальной скорости вагонетка разгонится за один полный круг, если её ускорение за этот промежуток времени не должно превысить значение a=1 м/с^2?

Ответ: ≈0,63 м/с.

Решение. Ускорение разгона вагонетки: $a_1 = \frac{v^2}{2S} = \frac{v^2}{4\pi R}$. **(3 балла)**

Кроме того, у вагонетки присутствует центростремительное ускорение:

$a_2 = \frac{v^2}{R}$. **(1 балл)**

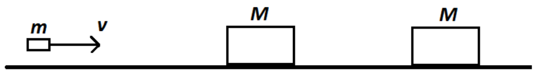
Полное ускорение вагонетки: $a^2 = a_1^2 + a_2^2 = \left(\frac{v^2}{4\pi R}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2$. **(3 балла)**

Получаем, что конечная скорость вагонетки не может быть больше чем:

$v_{max} = \sqrt[4]{\frac{16\pi^2R^2a^2}{(16\pi^2+1)^2}}$. **(2 балла)**

В результате получаем $v_{max} \approx 0{,}63$ м/с. **(1 балл)**

6. (10 *баллов*) На горизонтальной поверхности располагаются два одинаковых небольших неподвижных бруска массами M каждый. Расстояние между ними S. В левый брусок попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля массой m. Какой должна быть скорость пули, чтобы конечное расстояние между брусками было также равно S. Столкновение между брусками абсолютно упругое. Масса пули намного меньше массы бруска $m<<M$. Коэффициент трения между брусками и горизонтальной поверхностью μ, ускорение свободного падения g.



Ответ: $v = \frac{2M}{m}\sqrt{\mu g S}$.

Решение. Закон сохранения импульса для столкновения пули с левым бруском: $mv = (M + m)u = Mu$. **(2 балла)**

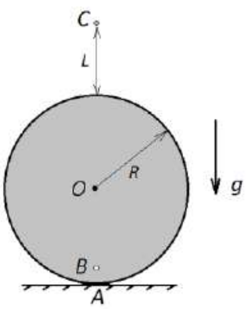
В случае абсолютно упругого удара между телами одинаковой массы происходит «обмен скоростями». **(3 балла)**

Закон сохранения энергии для последующего движения брусков:

$\frac{Mu^2}{2} = A_{\text{тр}} = 2\mu M g S$. **(3 балла)**

В результате, скорость пули: $v = \frac{2M}{m}\sqrt{\mu g S}$. **(2 балла)**

7. (15 *баллов*) Равномерно заряженный по объёму шар радиусом R закреплён на горизонтальной поверхности в точке A. Заряд шара Q. В точке C, которая располагается на расстоянии L от поверхности шара, парит заряженный шарик радиусом r и массой m. Его заряд q. Известно, что $r<<R$. Определите ускорение шарика сразу после того, как в точке B удалили часть материала. Известно, что AB=S. Удалённый материал представляет собой шарик радиусом r. Точки A, B, C, O располагаются на одной вертикали. Ускорение свободного падения g.



Ответ: $a = \frac{kqQr^3}{mR^3(L+2R-S)^2}$.

Решение. В начальном состоянии для шарика: $F_э = mg$. **(2 балла)**

В конечном состоянии для шарика: $F_э - mg - F_{удал} = -ma$, **(2 балла)**

где $F_{удал} = k\frac{qq_{удал}}{(L+2R-S)^2}$. **(4 балла)**

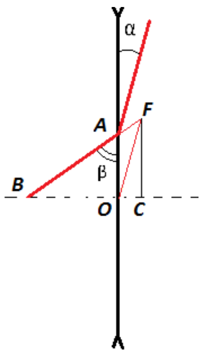
Удалённый заряд: $q_{удал} = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$. **(4 балла)**

Получаем $a = \frac{kqQr^3}{mR^3(L+2R-S)^2}$. **(3 балла)**

8. (15 *баллов*) Тонкий луч света падает на тонкую рассеивающую линзу на расстоянии x=10 см от её оптического центра. Угол между падающим лучом и плоскостью линзы α=30°, между преломлённым лучом и плоскостью линзы β=45°. Определите её фокусное расстояние.

Ответ: ≈13,7 см.

Решение. Продолжения параллельных лучей пересекаются в фокусе, поэтому F – фокус данной линзы. **(3 балла)**



В треугольнике OAF: угол AOF=30°, угол OFA=15°, угол OAF=135°. **(4 балла)**

Следовательно, $\frac{OF}{\sin 135°} = \frac{OA}{\sin 15°}$. **(4 балла)**

Получаем, что фокусное расстояние:

$OC = OF\sin 30° = OA\frac{\sin 135°}{\sin 15°}\sin 30° \approx 13{,}7$ см. **(4 балла)**

11 класс **Заключительный тур** **2022-2023**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Решите уравнение $(x^4-2)(2^{\operatorname{tg}x}-1)+\left(3^{x^4}-9\right)\operatorname{tg}x=0$.

Ответ: $\pm\sqrt[4]{2}$; $\pi n,\ \ n\in Z$.

Решение. Функции $y=2^t$ и $y=3^t$ – возрастающие, следовательно, выражение $3^{x^4}-9=3^{x^4}-3^2$ имеет такой же знак, как и x^4-2, а выражение $2^{\operatorname{tg}x}-1=2^{\operatorname{tg}x}-2^0$ имеет такой же знак, как и $\operatorname{tg}x-0=\operatorname{tg}x$. Таким образом, слагаемые в левой части уравнения – одного знака, равенство нулю возможно лишь в том случае, когда один из множителей равен нулю. Имеем $\left[\begin{array}{l}x^4-2=0,\\ \operatorname{tg}x=0.\end{array}\right.$ Решая эти уравнения, получаем ответ.

Критерии оценивания. За полностью обоснованное верное решение – 12 баллов. Если участник без обоснования приравнял к нулю каждое слагаемое и получил верный ответ, ставить 4 балла.

2. (13 *баллов*) Участник соревнований по триатлону на первом этапе плыл 1 км. На втором ехал на велосипеде 25 км, на третьем бежал 4 км. Всю дистанцию он преодолел за 1 час 15 мин. Перед соревнованиями он опробовал трассу: плыл $1/16$ часа, ехал на велосипеде и бежал по $1/49$ часа, пройдя в сумме $5/4$ км. На соревнованиях каждый этап он проходил с той же скоростью, что и на тренировке. Сколько времени он ехал на велосипеде и с какой скоростью?

Ответ: 5/7 часа; 35 км/час.

Решение. Пусть v_1, v_2, v_3 – скорости спортсмена на этапах 1, 2, 3 соответственно. Из условия следует: $\frac{1}{v_1}+\frac{25}{v_2}+\frac{4}{v_3}=\frac{5}{4}$ часа; $\frac{1}{16}v_1+\frac{1}{49}v_2+\frac{1}{49}v_3=\frac{5}{4}$ км. Складывая эти уравнения и учитывая, что для любых положительных чисел x, y выполнено неравенство $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (1), получим:

$$\frac{5}{2}=\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{16}v_1\right)+\left(\frac{25}{v_2}+\frac{1}{49}v_2\right)+\left(\frac{4}{v_3}+\frac{1}{49}v_3\right)\geq$$

$$\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{1}{16}}+2\sqrt{25\cdot\frac{1}{49}}+2\sqrt{4\cdot\frac{1}{49}}=2\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{2}. \qquad (2)$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда слагаемые в левой части неравенства (1) равны. Следовательно,

$$\frac{1}{v_1}=\frac{1}{16}v_1; \quad \frac{25}{v_2}=\frac{1}{49}v_2; \quad \frac{4}{v_3}=\frac{1}{49}v_3$$

то есть $v_1 = 4\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_2 = 35\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_3 = 14\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Критерии оценивания. Получен верный ответ при полном обосновании – 13 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 1–2 балла. Получена верная система уравнений – 2 балла (по 1 баллу за каждое). Использовано неравенство (1) или равносильное и получено следствие (2) – еще 6 баллов (всего 8). Сделан вывод, что во всех трёх случаях в (1) имеет место равенство – ещё 4 балла (всего 12 баллов).

3. (12 *баллов*) Последовательность функций задана формулами

$$f_0(x) = 3\sin x,\ f_{n+1}(x) = \frac{9}{3-f_n(x)}$$

для любого целого $n \geq 0$. Найдите $f_{2023}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Ответ: $f_{2023}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6$.

Решение. Легко вычислить: $f_3(x) = f_0(x)$, поэтому $f_{2023}(x) = f_1(x) = \frac{9}{3-3\sin x}$. Следовательно, $f_{2023}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6$.

Замечание. Можно сразу вычислять значения функций в данной точке. Получится циклическая последовательность

$$f_0\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2};\ f_1\left(\frac{\pi}{6}\right)=6;\ f_2\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3;\ f_3\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2};\ldots$$

Критерии оценивания. Полное решение – 12 баллов. Найдено соотношение $f_3(x) = f_0(x)$ – 7 баллов, найдено равенство $f_{2023}(x) = f_1(x)$ – ещё 4 балла. Ошибки в счёте – минус 1балл.

4. (13 *баллов*) Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, а стороны основания равны $\sqrt{61}$, $\sqrt{52}$ и $\sqrt{41}$. Центр сферы, которая касается всех боковых граней, лежит на основании пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

Ответ: $\frac{60}{37}$.

Решение. Обозначим основание пирамиды – *ABC*, вершину пирамиды – *D*, центр сферы – *O*, радиус сферы – *r*. Пусть $AB=\sqrt{41}$, $BC=\sqrt{61}$, $AC=\sqrt{52}$. Обозначим $AD=x$, $BD=y$, $CD=z$.

Так как радиус, проведённый в точку касания сферы и плоскости, ортогонален плоскости, имеем:

$$V_{ABCD}=V_{ABDO}+V_{BCDO}+V_{ACDO}= \qquad (1)$$

$$=\frac{1}{3}S_{ABD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot r=$$

$$=\frac{1}{3}r\left(\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}xz\right). \qquad (2)$$

С другой стороны, так как боковые рёбра попарно перпендикулярны, то

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}xyz. \qquad (3)$$

Поэтому

$$r=\frac{xyz}{xy+yz+xz}. \qquad (4)$$

Числа x, y, z находятся из системы уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ x^2+z^2=52, \\ y^2+z^2=61. \end{cases}$

Складывая уравнения системы и деля на два, получим:

$$x^2+y^2+z^2=77,$$

откуда $x^2=16,\ y^2=25,\ z^2=36$. Используя формулу (4), находим $r=\frac{4\cdot5\cdot6}{4\cdot5+4\cdot6+5\cdot6}=\frac{60}{37}$.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Арифметические ошибки, не влияющие на смысл решения: минус 1 балл за каждую. Записано равенство (1) 2 балла. Получено для объёма пирамиды выражение (2) – еще 4 балла (всего в сумме 6 баллов). Записано равенство (3) 2 балла. Записана и решена система уравнений: 4 балла (только записана – 2 балла).

5. (10 *баллов*) Два камня одновременно брошены с одинаковой начальной скоростью v_0. Первый камень брошен горизонтально с высоты H=40 м, второй – с поверхности Земли вертикально вверх. Известно, что камни столкнулись в воздухе. Определите начальное расстояние между камнями. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: ≈56,6 м.

Решение. Уравнения движения первого камня: $y_1 = H - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

$x_1 = v_0 t = L,$ **(2 балла)**

где L – начальное расстояние между телами по горизонтали.

Уравнение движения второго тела: $y_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

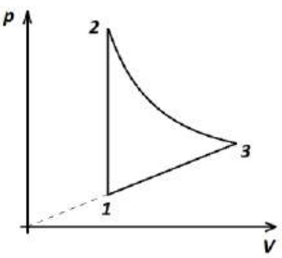
Так как камни встретились, то $y_1 = y_2$, **(1 балл)**

В результате: $H = v_0 t = L$. **(1 балл)**

Получаем, что начальное расстояние между камнями:

$S = \sqrt{2}H = \sqrt{2} \cdot 40 \approx 56{,}6$ м. **(2 балла)**

6. (15 *баллов*) В основе работы тепловой машины лежит цикл, состоящий из изохоры, изотермы и процесса с прямо пропорциональной зависимостью давления от объёма (см. рисунок). В качестве рабочего тела используется идеальный одноатомный газ. Известно, что максимальная и минимальная температуры отличаются в два раза. Определите КПД данной тепловой машины.



Ответ: 8,8 %.

Решение. Так как в процессе 3-1 температура меняется в два раза, то из уравнения состояния идеального газа $pV = \vartheta RT$ следует, что объём меняется в $\sqrt{2}$ раз. **(1 балл)**

Модуль работы газа в процессе 3-1 равен площади под графиком:

$A_{3-1} = \frac{1}{2}(p_1 + p_3)(V_3 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1V_3 - p_1V_1 + p_3V_3 - p_3V_1)$. **(2 балла)**

Так как: $p_1V_3 = p_3V_1$, **(1 балл)**

получаем: $A_{3-1} = \frac{1}{2}(-p_1V_1 + p_3V_3) = \frac{1}{2}\upsilon R(T_3 - T_1)$. **(2 балла)**

Количество теплоты в процессах: $Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{3}{2}\vartheta R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\vartheta RT_1$. **(2 балла)**

$Q_{23} = A_{23} = \vartheta RT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) = 2\vartheta RT_1 \ln\sqrt{2}$. **(2 балла)**

$Q_{31} = \Delta U_{31} + A_{31} = \frac{3}{2}\vartheta R(T_1 - T_3) + \frac{1}{2}\vartheta R(T_1 - T_3) = 2\vartheta R(T_1 - T_3) = -2\vartheta RT_1$. **(2 балла)**

КПД тепловой машины:

$\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} = \frac{Q_{12}+Q_{23}-|Q_{31}|}{Q_{12}+Q_{23}} = \frac{\frac{3}{2}\vartheta RT_1 + 2\vartheta RT_1 \ln\sqrt{2} - 2\vartheta RT_1}{\frac{3}{2}\vartheta RT_1 + 2\vartheta RT_1 \ln\sqrt{2}} = \frac{1{,}5+2\ln\sqrt{2}-2}{1{,}5+2\ln\sqrt{2}}$. **(2 балла)**

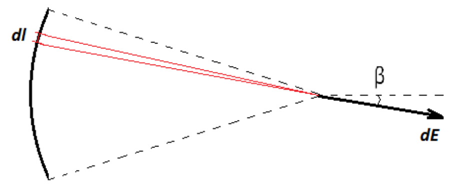
В результате: $\eta = 0{,}088 = 8{,}8\ \%$. **(1 балл)**

7. (10 *баллов*) Дуга, центральный угол которой α=30^О, вырезана из окружности радиусом R=50 см. По дуге равномерно распределён заряд q=2 мкКл. Определите напряжённость E электрического поля в центре кривизны этой дуги.

Ответ: 71 кВ/м.

Решение. Рассмотрим небольшой элемент дуги длиной dl, на котором располагается заряд dq. Он создаёт в искомой точке напряжённость:

$dE = k\frac{dq}{R^2}$. **(2 балла)**



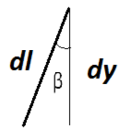
Данная напряжённость в проекции на горизонтальное направление:

$dE\cos\alpha = k\frac{dq}{R^2}\cos\beta$. **(2 балла)**

Заряд этого элемента $dq = \frac{q}{R \cdot \frac{\pi}{6}} \cdot dl.$ **(2 балла)**

Получаем $dE \cos\alpha = k \frac{\frac{q}{R \cdot \frac{\pi}{6}} \cdot dl}{R^2} \cos\beta = k \frac{6q \cdot dl \cdot \cos\beta}{\pi R^3}.$ **(1 балл)**

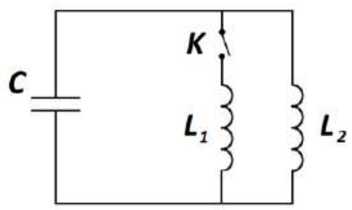
Обратим внимание, что $dl \cdot \cos\beta = dy.$ **(1 балл)**



Суммируя по всем таким элементам, получаем:

$E = k \frac{6q \cdot 2R \sin 15°}{\pi R^3} = 12k \frac{q \sin 15°}{\pi R^2} = 12 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \sin 15°}{\pi \cdot 0{,}5^2} = 71\,180\ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$ **(2 балла)**

8. (15 *баллов*) В идеальном контуре, состоящем из конденсатора ёмкостью C=2 мкФ и катушки индуктивностью L_2=1 мГн, происходят незатухающие свободные гармонические колебания тока с амплитудой I_{max}=5 мА. В тот момент времени, когда ток через катушку L_2 максимален, замыкают ключ K. Определите максимальное напряжение на конденсаторе после этого. Индуктивность катушки L_1=2 мГн.



Ответ: 90 мВ.

Решение. После замыкания ключа, правило Кирхгофа для контура, состоящего из катушек: $L_1 I_1^| + L_2 I_2^| = 0.$ **(1 балл)**

Получаем, что $L_1 I_1 + L_2 I_2 = const.$ **(2 балла)**

Когда напряжение на конденсаторе будет максимально, то ток на участке цепи с конденсатором равен нулю. Следовательно, токи через катушки одинаковые. **(2 балла)**

Получаем $L_2 I_{max} = (L_1 + L_2) I.$ **(3 балла)**

Получили, что $I = \frac{L_2 I_{max}}{L_1 + L_2} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-3}$ А. **(2 балла)**

Закон сохранения энергии: $\frac{L_2 I_{max}^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2) I^2}{2} + \frac{C U_{max}^2}{2}.$ **(2 балла)**

Получаем:

$$U_{max} = \sqrt{\frac{L_2 I_{max}^2}{C} - \frac{(L_1 + L_2) I^2}{C}} = \sqrt{\frac{1\cdot 10^{-3}(5\cdot 10^{-3})^2}{2\cdot 10^{-6}} - \frac{(2\cdot 10^{-3} + 1\cdot 10^{-3})\left(\frac{5}{3}\cdot 10^{-3}\right)^2}{2\cdot 10^{-6}}} = 0{,}09 \text{ В} =$$

90 мВ. **(3 балла)**

11 класс **Заключительный тур** **2022-2023**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Решите уравнение $(x^3-3)(2^{\operatorname{ctg}x}-1)+\left(5^{x^3}-125\right)\operatorname{ctg}x=0$.

Ответ: $\sqrt[3]{3};\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z.$

Решение. Функции $y=2^t$ и $y=5^t$ – возрастающие, следовательно, выражение $5^{x^3}-125=5^{x^3}-5^3$ имеет такой же знак, как и x^3-3, а выражение $2^{\operatorname{ctg}x}-1=2^{\operatorname{ctg}x}-2^0$ имеет такой же знак, как и $\operatorname{ctg}x-0=\operatorname{ctg}x$. Таким образом, слагаемые в левой части уравнения – одного знака, равенство нулю возможно лишь в том случае, когда один из множителей равен нулю. Получаем $\left[\begin{array}{l}x^3-3=0,\\ \operatorname{ctg}x=0.\end{array}\right.$ Решая эти уравнения, получаем ответ.

Критерии оценивания. За полностью обоснованное верное решение – 12 баллов. Если участник без обоснования приравнял к нулю каждое слагаемое и получил верный ответ, ставить 4 балла.

2. (13 *баллов*) Участник соревнований по триатлону на первом этапе плыл 1 км. На втором ехал на велосипеде 25 км, на третьем бежал 4 км. Всю дистанцию он преодолел за 1 час 15 мин. Перед соревнованиями он опробовал трассу: плыл $1/16$ часа, ехал на велосипеде и бежал по $1/49$ часа, пройдя в сумме $5/4$ км. На соревнованиях каждый этап он проходил с той же скоростью, что и на тренировке. Сколько времени он бежал и с какой скоростью?

Ответ: $2/7$ часа; 14 км/час.

Решение. Пусть v_1, v_2, v_3 – скорости спортсмена на этапах 1, 2, 3 соответственно. Из условия следует: $\frac{1}{v_1}+\frac{25}{v_2}+\frac{4}{v_3}=\frac{5}{4}$ часа; $\frac{1}{16}v_1+\frac{1}{49}v_2+\frac{1}{49}v_3=\frac{5}{4}$ км. Складывая эти уравнения и учитывая, что для любых положительных чисел x, y выполнено неравенство $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (1), получим:

$$\frac{5}{2}=\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{16}v_1\right)+\left(\frac{25}{v_2}+\frac{1}{49}v_2\right)+\left(\frac{4}{v_3}+\frac{1}{49}v_3\right)\geq$$

$$\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{1}{16}}+2\sqrt{25\cdot\frac{1}{49}}+2\sqrt{4\cdot\frac{1}{49}}=2\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{2}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда слагаемые в левой части неравенства (1) равны. Следовательно,

$$\frac{1}{v_1}=\frac{1}{16}v_1;\quad \frac{25}{v_2}=\frac{1}{49}v_2;\quad \frac{4}{v_3}=\frac{1}{49}v_3$$

то есть $v_1=4\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_2=35\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_3=14\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Критерии оценивания. Получен верный ответ при полном обосновании – 13 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 1–2 балла. Получена верная система уравнений – 2 балла (по 1 баллу за каждое). Использовано неравенство (1) или равносильное и получено следствие (2) – еще 6 баллов (всего 8). Сделан вывод, что во всех трёх случаях в (1) имеет место равенство – ещё 4 балла (всего 12 баллов).

3. (12 *баллов*) Последовательность функций задана формулами

$$f_0(x)=2\cos x,\ f_{n+1}(x)=\frac{4}{2-f_n(x)}$$

для любого целого $n\geq 0$. Найдите $f_{2023}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: $f_{2023}\left(\frac{\pi}{3}\right)=4$.

Решение. Легко вычислить: $f_3(x)=f_0(x)$, поэтому $f_{2023}(x)=f_1(x)=\frac{4}{2-2\cos x}$. Следовательно, $f_{2023}\left(\frac{\pi}{3}\right)=4$.

Замечание. Можно сразу вычислять значения функций в данной точке. Получится циклическая последовательность

$$f_0\left(\frac{\pi}{3}\right)=1;\ f_1\left(\frac{\pi}{3}\right)=4;\ f_2\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2;\ f_3\left(\frac{\pi}{3}\right)=1;\ \ldots$$

Критерии оценивания. Полное решение – 12 баллов. Найдено соотношение $f_3(x)=f_0(x)$ – 7 баллов, найдено равенство $f_{2023}(x)=f_1(x)$ – ещё 4 балла. Ошибки в счёте – минус 1балл.

4. (13 *баллов*) Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, а стороны основания равны $\sqrt{85}$, $\sqrt{58}$ и $\sqrt{45}$. Центр сферы, которая касается всех боковых граней, лежит на основании пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

Ответ: $\frac{14}{9}$.

Решение. Обозначим основание пирамиды – *ABC*, вершину пирамиды – *D*, центр сферы – *O*, радиус сферы – *r*. Пусть $AB=\sqrt{45}$, $BC=\sqrt{85}$, $AC=\sqrt{58}$. Обозначим $AD=x$, $BD=y$, $CD=z$.

Так как радиус, проведённый в точку касания сферы и плоскости, ортогонален плоскости, имеем:

$$V_{ABCD}=V_{ABDO}+V_{BCDO}+V_{ACDO}= \tag{1}$$

$$=\frac{1}{3}S_{ABD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot r=$$

$$=\frac{1}{3}r\left(\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}xz\right). \tag{2}$$

С другой стороны, так как боковые рёбра попарно перпендикулярны, то

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}xyz. \tag{3}$$

Поэтому

$$r=\frac{xyz}{xy+yz+xz}. \tag{4}$$

Числа $x,\ y,\ z$ находятся из системы уравнений: $\begin{cases}x^2+y^2=45,\\ x^2+z^2=58,\\ y^2+z^2=85.\end{cases}$

Складывая уравнения системы и деля на два, получим: $x^2+y^2+z^2=94$, откуда $x^2=9,\ y^2=36,\ z^2=49$. Используя формулу (4), находим $r=\frac{3\cdot 6\cdot 7}{3\cdot 6+3\cdot 7+6\cdot 7}=\frac{14}{9}$.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Арифметические ошибки, не влияющие на смысл решения: минус 1 балл за каждую. Записано равенство (1) 2 балла. Получено для объёма пирамиды выражение (2) – еще 4 балла (всего в сумме 6 баллов). Записано равенство (3) 2 балла. Записана и решена система уравнений: 4 балла (только записана – 2 балла).

5. (10 *баллов*) Два камня одновременно брошены с одинаковой начальной скоростью v_0. Первый камень брошен горизонтально с высоты H=50 м, второй – с поверхности Земли вертикально вверх. Известно, что камни столкнулись в воздухе. Определите начальное расстояние между камнями. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: ≈70,7 м.

Решение. Уравнения движения первого камня: $y_1 = H - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

$x_1 = v_0 t = L,$ **(2 балла)**

где L – начальное расстояние между телами по горизонтали.

Уравнение движения второго тела: $y_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

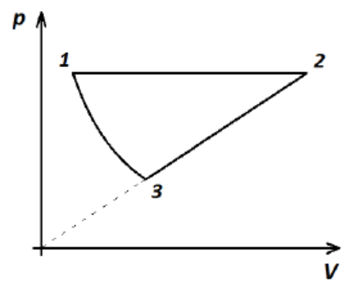
Так как камни встретились, то $y_1 = y_2$, **(1 балл)**

В результате: $H = v_0 t = L$. **(1 балл)**

Получаем, что начальное расстояние между камнями:

$S = \sqrt{2}H = \sqrt{2} \cdot 50 \approx 70{,}7$ м. **(2 балла)**

6. (15 *баллов*) В основе работы тепловой машины лежит цикл, состоящий из изобары, изотермы и процесса с прямо пропорциональной зависимостью давления от объёма (см. рисунок). В качестве рабочего тела используется идеальный одноатомный газ. Известно, что максимальная и минимальная температуры отличаются в два раза. Определите КПД данной тепловой машины.



Ответ: 6,1 %.

Решение. Так как в процессе 2-3 температура меняется в два раза, то из уравнения состояния идеального газа $pV = \vartheta RT$ следует, что давление меняется в $\sqrt{2}$ раз. **(1 балл)**

Модуль работы газа в процессе 2-3 равен площади под графиком:

$A_{2-3} = \frac{1}{2}(p_2 + p_3)(V_2 - V_3) = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_2V_3 + p_3V_2 - p_3V_3)$. **(2 балла)**

Так как $p_2V_3 = p_3V_2$, **(1 балл)**

Получаем $A_{2-3} = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_3V_3) = \frac{1}{2}\upsilon R(T_2 - T_3)$. **(2 балла)**

Количество теплоты в процессах:

$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2}\vartheta R(T_2 - T_1) + \vartheta R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\vartheta RT_1$. **(2 балла)**

$Q_{31} = A_{31} = \vartheta RT_1 \ln\left(\frac{p_3}{p_1}\right) = -\vartheta RT_1 \ln\sqrt{2}$. **(2 балла)**

$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2}\vartheta R(T_3 - T_2) + \frac{1}{2}\vartheta R(T_3 - T_2) = 2\vartheta R(T_3 - T_2) = -2\vartheta RT_1$.
(2 балла)

КПД тепловой машины:

$\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} = \frac{Q_{12} - |Q_{31} + Q_{23}|}{Q_{12}} = \frac{\frac{5}{2}\vartheta RT_1 - \vartheta RT_1 \ln\sqrt{2} - 2\vartheta RT_1}{\frac{5}{2}\vartheta RT_1} = \frac{2{,}5 - \ln\sqrt{2} - 2}{2{,}5}$. **(2 балла)**

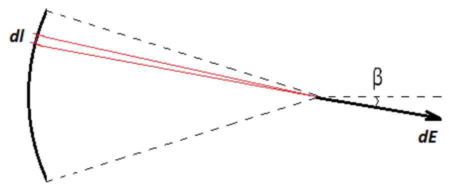
В результате: $\eta = 0{,}061 = 6{,}1\ \%$. **(1 балл)**

7. (10 *баллов*) Дуга, центральный угол которой α=60^{O}, вырезана из окружности радиусом *R*=40 см. По дуге равномерно распределён заряд *q*=5 мкКл. Определите напряжённость *E* электрического поля в центре кривизны этой дуги.

Ответ: 269 кВ/м.

Решение. Рассмотрим небольшой элемент дуги длиной dl, на котором располагается заряд dq. Он создаёт в искомой точке напряжённость:

$dE = k\frac{dq}{R^2}$. **(2 балла)**



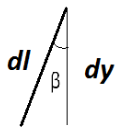
Данная напряжённость в проекции на горизонтальное направление:

$dE\cos\alpha = k\frac{dq}{R^2}\cos\beta$. **(2 балла)**

Заряд этого элемента: $dq = \frac{q}{R\cdot\frac{\pi}{3}} \cdot dl$. **(2 балла)**

Получаем: $dE\cos\alpha = k\frac{\frac{q}{R\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot dl}{R^2}\cos\beta = k\frac{3q\cdot dl\cdot\cos\beta}{\pi R^3}$. **(1 балл)**

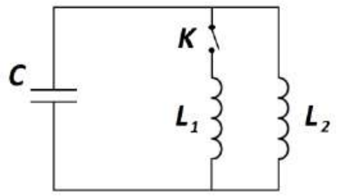
Обратим внимание, что: $dl\cdot\cos\beta = dy$. **(1 балл)**



Суммируя по всем таким элементам, получаем:

$E = k\frac{3q\cdot 2R\sin 30°}{\pi R^3} = 6k\frac{q\sin 30°}{\pi R^2} = 6\cdot 9\cdot 10^9\frac{5\cdot 10^{-6}\sin 30°}{\pi\cdot 0{,}4^2} = 268\,574\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$. **(2 балла)**

8. (15 *баллов*) В идеальном контуре, состоящем из конденсатора ёмкостью C=1 мкФ и катушки индуктивностью L_2=2 мГн, происходят незатухающие свободные гармонические колебания тока с амплитудой $I_{\max}$=10 мА. В тот момент времени, когда ток через катушку L_2 максимален, замыкают ключ K. Определите максимальное напряжение на конденсаторе после этого. Индуктивность катушки L_1=4 мГн.



Ответ: 516 мВ.

Решение. После замыкания ключа, правило Кирхгофа для контура, состоящего из катушек: $L_1 I_1^| + L_2 I_2^| = 0$. **(1 балл)**

Получаем, что $L_1 I_1 + L_2 I_2 = const$. **(2 балла)**

Когда напряжение на конденсаторе будет максимально, то ток на участке цепи с конденсатором равен нулю. Следовательно, токи через катушки одинаковые. **(2 балла)**

Получаем: $L_2 I_{max} = (L_1 + L_2)I$. **(3 балла)**

Получили, что $I = \frac{L_2 I_{max}}{L_1+L_2} = \frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 10\cdot 10^{-3}}{6\cdot 10^{-3}} = \frac{10}{3}\cdot 10^{-3}$ А. **(2 балла)**

Закон сохранения энергии $\frac{L_2 I_{max}^2}{2} = \frac{(L_1+L_2)I^2}{2} + \frac{CU_{max}^2}{2}$. **(2 балла)**

Получаем:

$$U_{max} = \sqrt{\frac{L_2 I_{max}^2}{C} - \frac{(L_1+L_2)I^2}{C}} = \sqrt{\frac{2\cdot10^{-3}(10\cdot10^{-3})^2}{1\cdot10^{-6}} - \frac{(4\cdot10^{-3}+2\cdot10^{-3})\left(\frac{10}{3}\cdot10^{-3}\right)^2}{1\cdot10^{-6}}} =$$

$0{,}516 \text{ В} = 516 \text{ мВ}.$ **(3 балла)**