Ерофеева Л.Н. Лещева С.В.

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА»

РУКОВОДСТВО

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева в качестве учебного пособия для студентов всех специальностей и всех форм обучения

Нижний Новгород 2014

УДК 517.2
Е 78

Рецензент
профессор, доктор физико-математических наук ***М.И. Кузнецов***

Ерофеева Л.Н., Лещева С.В.
Е 78 **Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике**: учеб. пособие / Л.Н. Ерофеевой, С.В. Лещевой; Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева. – Н. Новгород, 2014. – 152 с.

ISBN 978-5-502-00421-3

Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей и всех форм обучения при изучении раздела теория вероятностей и математическая статистика.

Содержит основные понятия и определения данного раздела математики, примеры решения задач и руководство к их решению.

Рис. 38. Табл. 31. Библиограф.: 13 назв.

УДК 517.2

ISBN 978-5-502-00421-3

© Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, 2014
© Ерофеева Л.Н., Лещева С.В., 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов всех специальностей всех форм обучения, изучающих дисциплину “Теория вероятностей и математическая статистика”.

Теория вероятностей является одной из важнейших и необходимых составных частей математики. Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надёжности, теории массового обслуживания, теории игр, в теоретической физике и во многих других теоретических и прикладных науках. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которые, в свою очередь, используются при планировании и организации производства, анализе технологических процессов и для многих других целей. В последние годы методы теории вероятностей всё шире и шире проникают в различные области науки, техники и экономики, способствуя их прогрессу.

Цель данного пособия – дать студентам представление о теоретических основах главных понятий, законов и методов данной дисциплины, научить студентов применять полученные знания к решению практических задач.

В данном пособии в начале каждой главы приведен теоретический материал, а также подробно рассмотрены основные методы решения задач по соответствующей теме, что дает возможность студентам изучать разделы дисциплины самостоятельно.

Над данным учебным пособием работал коллектив кафедры “Высшая математика” НГТУ им.Р.Е.Алексеева. Теоретический блок 1-й – 3-й глав пособия разработан Л.Н. Ерофеевой и С.В. Лещевой. Практический материал 1-й главы подготовлен Ю.В Белоглазовой, М.С. Барановой, М.Е. Елисеевым, Н.В. Юровой, А.В. Волохиным, Н.В. Мохниной, Л.М. Кузнецовой, Е.К. Китаевой. В подготовке практической главы 2 принимали участие – М.Ф. Авдеева, Е.Б. Шинкарева, Т.И. Пересыпкина, Е.Ф. Ромашевская, Т.Е Шувалова, С.В. Лещева, Л.Н. Ерофеева, Т.В. Лухманова, главы 3 – С.И. Хомутецкая, С.Д. Щуко, В.И. Сухов, А.Н. Ефремова.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезно студентам при выполнении самостоятельных и расчетно-графических работ, а также при подготовке к сдаче экзамена по этой дисциплине.

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Основные понятия и определения

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Под *вероятностью* понимают число, которое выражает степень уверенности в наступлении того или иного случайного события.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания.

Испытание, или *опыт* – это процесс, включающий определенные условия и приводящий к одному из нескольких возможных *исходов*. Единичный, отдельный исход испытания называется *элементарным событием*.

Множество W всех возможных исходов опыта образуют пространство элементарных событий. Например, при подбрасывании двух монет

$$W = (ГГ,\ ГР,\ РГ,\ РР),$$

где $Г$ – появление герба, $Р$ – появление «решки».

Любое подмножество пространства W называется *событием*. События обычно обозначают буквами A, B, C, ….

Достоверным (U) называется событие, которое обязательно произойдет в результате опыта.

Невозможным (V) называется событие, которое не может произойти в результате данного опыта.

Совместными называются несколько событий, если в результате опыта наступление одного из них не исключает появление других.

Несовместными называются несколько событий, если в результате опыта появление одного из них исключает появление других.

Равновозможными называются события, если в результате опыта по условиям симметрии ни одно из этих событий не является объективно более возможным. Например, появление герба или «решки» при подбрасывании монеты – события равновозможные, если монета симметрична.

События образуют *полную группу*, если в результате испытания появление хотя бы одного из них является достоверным событием.

1.2. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий количество различных комбинаций, которые можно составить заданным способом из элементов данного множества.

При решении задач необходимо знать основные формулы комбинаторики.

Перестановками из n элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит все n элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Пример 1. Менеджер ежедневно просматривает 6 изданий экономического содержания. Если порядок просмотра изданий случаен, то сколько существует способов его осуществления?

Решение. По условию $n = 6$, следовательно, $P_6 = 6! = 720$.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит m элементов, взятых из числа данных n, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или порядком их расположения:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры, но помнил, что эти три цифры различны, поэтому набрал их наудачу. Найти количество возможных наборов цифр.

Решение. Всего возможных исходов A_{10}^3: так как цифр десять, а размещения учитывают порядок цифр и их состав

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720.$$

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит m элементов, взятых из числа данных n, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 3. Сколько возможно вариантов при заполнении карточки спортивной лотереи «6 из 36» ?

Решение. Так как порядок вычеркивания при заполнении карточки не важен, используем сочетания

$$C_{36}^6 = \frac{36!}{6!(36-6)!} = \frac{31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{6!} = 1947792.$$

1.3. Вероятность. Определения и свойства

При *классическом определении* за *вероятность* события A принимается отношение числа исходов m, благоприятствующих данному событию A, к общему числу n всех равновозможных несовместных исходов испытания, образующих полную группу:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Из классического определения очевидны следующие свойства вероятности:

1. $P(U) = 1$.
2. $P(V) = 0$.
3. $0 \le P(A) \le 1$.
4. Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$.

Пример 1. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.

Решение

а) $n = 9$, так как всего 9 различных карточек.
$m = 4$, так как на 4 карточках написаны четные числа (2, 4, 6, 8).
Тогда P=4/9.

б) $n = 9$. $m = 0$, так как на карточках написаны цифры.
Тогда P=0/9=0.

Пример 2. Из разрезной азбуки сложено слово «МАМА», затем рассыпано и сложено случайным образом. Найти вероятность того, что снова получится слово «МАМА».

Решение. $n = P_4 = 4! = 24$, $m = 2!\cdot 2! = 4 \Rightarrow P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} = 0.17$.

Пример 3. Четыре человека, среди которых двое знакомых, случайным образом рассаживаются на шесть свободных мест. Какова вероятность того, что знакомые окажутся рядом сидящими?

Решение.

$$n = A_6^4 = \frac{6!}{2!},\ m = (4\cdot 2 + 2)\cdot A_4^2 = \frac{10\cdot 4!}{2!} \Rightarrow P = \frac{m}{n} = \frac{10\cdot 4!\cdot 2!}{2!\cdot 6!} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Пример 4. Из группы, состоящей из 4 студенток и 7 студентов, случайным образом отбираются 5 человек. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется ровно 2 студентки?

Решение

$$n = C_{11}^5,\ m = C_4^2\cdot C_7^3\ .\ P = \frac{C_4^2\cdot C_7^3}{C_{11}^5} = \frac{4!\cdot 7!\cdot 5!\cdot 6!}{2!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 11!} = \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11} = \frac{105}{231}.$$

Недостатком классического определения вероятности является невозможность его использования при бесконечном количестве исходов опыта.

Геометрическая вероятность – это вероятность попадания в некоторую область g, составляющую часть области G. Тогда вероятность попадания точки в упомянутую область g (событие A) есть отношение мер этих областей:

$$P(A)=\frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G},$$

где mes – сокращение слова measure (мера).
В качестве меры могут быть использованы: длина отрезка, площадь, объем.

Пример 5. В точке C, положение которой на телефонной линии AB длиной L равновозможно, произошел разрыв. Найти вероятность того, что точка C удалена от точки A на расстояние, меньшее l.

Решение. $P(A)=\frac{l}{L}$. Здесь в качестве меры мы рассмотрели длины отрезков.

Пример 6. Найти вероятность того, что корни квадратного уравнение $ax^2+x+b=0$ действительны (событие A), если параметры a и b случайным и независимым образом выбираются из отрезка [0; 1].

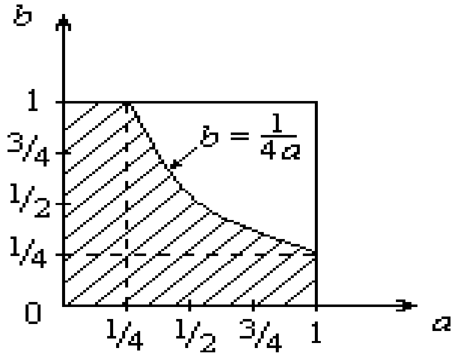

Рис. 1.1

Решение. Корни действительны, если дискриминант уравнения неотрицателен, т.е. $1-4ab\ge 0$ или $ab\le\frac{1}{4}$. Изобразим эту область в плоскости с координатами a и b (рис.1.1). В качестве меры областей рассмотрим площади фигур. S – площадь квадрата со стороной *1*. Событию A соответствует заштрихованная область. Найдем ее площадь:

$$s=\frac{1}{4}+\int_{1/4}^{1}\frac{da}{4a}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4\approx 0{,}6.$$

Таким образом, $P(A)=\frac{s}{S}\approx 0{,}6$.

В основе *статистического* определения вероятности лежит явление устойчивости частоты наступления события при многократном повторении испытаний. Пусть при n испытаниях событие A появилось n_A раз. Отношение $\omega_A=\frac{n_A}{n}$ называется *относительной частотой* случайного события A.

Факт приближения отношений частоты события к его вероятности при увеличении числа испытаний подтверждается многочисленными экспериментами. Так, в опытах Бюффона относительная частота появления герба при 4040 подбрасываниях оказалась равной 0,5069, в опытах Пирсона при 12000 подбрасываниях монеты относительная частота появления герба оказалась 0,5016, а при 24000 подбрасываниях – 0,5005. Из приведенных данных видно, что при увеличении числа опытов отклонение частоты ω_A от числа 0,5 уменьшается. Поэтому можно принять

$$P(A)=\omega_A=0{,}5.$$

Статистической вероятностью события A называется относительная частота появления этого события в n испытаниях:

$$P(A) = \omega_A = \frac{n_A}{n}.$$

Пример 7. Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Какова вероятность рождения мальчика в такой серии наблюдений?

Решение. $P(A) = \dfrac{515}{1000} = 0{,}515.$

1.4. Алгебра событий. Теоремы сложения и умножения

Произведением событий A и B называется событие $C=AB$, состоящее в том, что произошли оба исходных события одновременно.

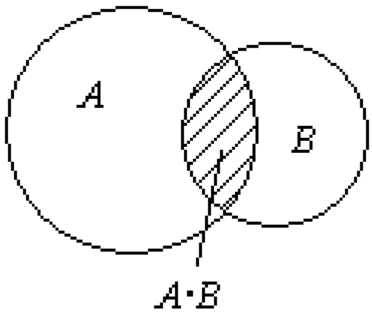

Рис. 1.2

Если $AB = V$, то говорят, что A и B *несовместны* (рис. 1.2).

Замечание. Произведение означает связку «и». Событие C так же называют *пересечением* событий A и B: $C = A \bigcap B$.

Пример 1. Событие A – «из колоды карт вынута дама», событие B – «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Тогда событие AB – «вынута дама пик».

Пример 2. Событие A – «число выпавших очков < 5», событие B – «число выпавших очков > 2», C – «число выпавших очков четное». Тогда событие ABC – «выпало 4 очка».

События A и B называются *независимыми,* если появление или непоявление одного из них не влияет на вероятность появления другого. События A и B называются *зависимыми*, если вероятность одного из них меняется в зависимости от того, произошло другое событие или нет.

Для независимых событий справедливо равенство

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Если события A и B зависимы, то имеет место правило

$$P(AB) = P(B)P(A/B),$$

где $P(A/B)$ – *условная вероятность* – вероятность реализации события A при условии, что событие B уже произошло.

Аналогично, если произошло сначала событие A, то $P(AB) = P(A)P(B/A)$.

Это правило легко распространить и на бóльшее число случайных событий, например: $P(ABC) = P(AB)P(C/AB) = P(A)P(B/A)P(C/AB)$.

Заметим, что для независимых событий A и B справедливо

$$P(A/B) = P(A),$$
$$P(B/A) = P(B).$$

Суммой двух событий A и B называется событие $C = A + B$, которое состоит в появлении либо события A, либо события B, либо событий A и B одновременно (рис.1.3).

Замечание. Знаком плюс обозначается связка «или». Событие C также называют *объединением* событий A и B: $C = A \bigcup B$.

$C = A + B$ $\qquad$ $C = A + B$

Рис. 1.3

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A, если оно заключается в том, что событие A не происходит. События A и $\overline{A}$ образуют полную группу, так как 1) $\overline{A} + A = U$; 2) $\overline{A} \cdot A = V$ рис.1.4.
Для рассмотренных операций над событиями справедливы теоремы двойственности:

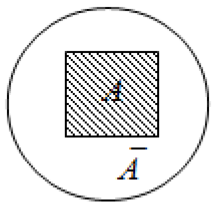

Рис. 1.4

$$\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B},$$
$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Пример 3. В партии 3 детали. События $A_i - i$-я деталь бракованная. Представить через A_i и $\overline{A_i}$ следующие события:
1) $A -$ только вторая деталь бракованная;
2) $B -$ одна деталь бракованная;
3) $C -$ менее двух деталей бракованных;
4) D – все детали бракованные.

Решение

1) $A = \overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3}$.
2) $B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$
3) $C = \overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3} + B.$
4) $D = A_1A_2A_3$.

Пример 4. Имеем события $A -$ деталь 1-го сорта, $B -$ деталь 2-го сорта, $C -$ деталь 3-го сорта. В чем заключаются следующие события: $A + B$, $\overline{A+C}$, AC, $AB+C$?

Решение. $A + B$ – деталь 1-го или 2-го сорта;
$\overline{A+C} = \overline{A}\ \overline{C}$ деталь не 1-го или не 3-го сорта, т.е. $\overline{A+C} = B$ – деталь 2-го сорта;

$AC=V$– невозможное событие;
$AB+C=C$ – деталь 3-го сорта (так как $AB=V$, $V+C=C$).

Теорема сложения для несовместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие. Вероятность появления какого–либо из нескольких *попарно несовместных* событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Теорема сложения для совместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB).$$

Теорема о вероятности противоположного события:
для любого события A вероятность противоположного события $\overline{A}$ выражается формулой

$$P(\overline{A}) = 1 – P(A).$$

Теорема о вероятности появления хотя бы одного события:
вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности может быть найдена по формуле

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = 1–P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \ldots (\overline{A_n}).$$

Пример 5. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

Решение. Введем события:
A_1 = (газеты доставлены своевременно в первое отделение),
A_2 = (газеты доставлены своевременно во второе отделение),
A_3 = (газеты доставлены своевременно в третье отделение).
По условию $P(A_1)=0{,}95$; $P(A_2) = 0{,}9$; $P(A_3) = 0{,}8$.
а. Найдем вероятность события X = (только одно отделение получит газеты вовремя). Событие X произойдет, если газеты доставлены своевременно в 1-е отделение и не доставлены вовремя во 2-е и 3-е, или газеты доставлены своевременно в 2-е отделение, и не доставлены вовремя в 1-е и 3-е, или газеты доставлены своевременно в 3-е отделение, и не доставлены вовремя во 2-е и 1-е.

Таким образом, $X = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

Так как события A_1, A_2, A_3 – независимые, то используя теоремы, получаем

$$P(X) = P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right) = P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right) =$$

$$= P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P(A_3) =$$

$$= 0{,}95\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2+0{,}05\cdot 0{,}9\cdot 0{,}2+0{,}05\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8 = 0{,}032.$$

б. Найдем вероятность события Y= (хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием). Рассмотрим противоположное событие $\overline{Y}$ (все отделения получат газеты вовремя). Вероятность этого события

$$P(\overline{Y}) = P(A_1\, A_2\, A_3) == P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}95\cdot 0{,}9\cdot 0{,}8=0{,}684.$$

$$P(Y) = 1 - P(\overline{Y}) = 1 - 0{,}684 = 0{,}316.$$

Пример 6. Из урны, в которой находятся 5 красных, 2 синих и 4 желтых шара наудачу без возвращения в урну извлекаются 7 шаров. Найти вероятность того, что среди этих шаров окажется:

1. Ровно 3 красных шара.

2. 2 шара. Найти вероятность того, что:

а) это будут желтые шары;

б) эти шары будут одного цвета;

в) эти шары будут разного цвета;

г) среди этих шаров будет хотя бы один красный;

3. 3 шара. Найти вероятность того, что:

а) эти шары будут одного цвета;

б) эти шары будут разных цветов;

Решение

1. В урне 5 красных и 6 некрасных шаров, следовательно,

$$P = \frac{C_5^3 \cdot C_6^4}{C_{11}^7} = \frac{5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 4!}{3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 11!} = \frac{4\cdot 5\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11} = 0{,}45\,.$$

2. а) $P(ж \text{ и } ж) = \frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} = \frac{6}{55}$;

б) $P(к \text{ и } к \text{ или } с \text{ и } с \text{ или } ж \text{ и } ж) = \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10} + \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10} + \frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} = \frac{17}{55}$;

в) для двух шаров событие $\overline{A}$ – «шары разного цвета» противоположно событию A – «шары одного цвета» => $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{17}{55} = \frac{38}{55}$.

г) считаем, что в урне 5 красных и 6 некрасных шаров. Пусть событие B – «хотя бы один красный шар среди извлеченных», $\overline{B}$ – «нет красных шаров среди извлеченных». Тогда $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10} = \frac{80}{110} = \frac{8}{11}$.

3. а) $P(к \text{ и } к \text{ и } к \text{ или } с \text{ и } с \text{ и } с \text{ или } ж \text{ и } ж \text{ и } ж) =$

$$= \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{0}{9} + \frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{60+24}{990} = \frac{84}{990}.$$

б) $P(к, ж, с) = \frac{5}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot 3! = \frac{5\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot}{11\cdot 10\cdot 9} = \frac{8}{33}$.

Примечание. Множитель 3! соответствует числу перестановок трех элементов.

Пример 7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Решение. Введем независимые события:

A_1 = (при аварии сработает первый сигнализатор);

A_2 = (при аварии сработает второй сигнализатор).

По условию задачи $P(A_1)$=0,95, $P(A_2)$=0,9. Введем событие X = (при аварии сработает только один сигнализатор). Это событие произойдет, если при аварии сработает первый сигнализатор и не сработает второй, или если при аварии сработает второй сигнализатор и не сработает первый, то есть $X = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$.

$$P(X) = P(A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = 0{,}95\cdot 0{,}1 + 0{,}05\cdot 0{,}9 = 0{,}14.$$

Пример 8. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Решение. Пусть p – вероятность попадания в цель при одном выстреле. Событие X = {при четырех выстрелах есть хотя бы одно попадание}, тогда $\overline{X}$ = {при четырех выстрелах нет ни одного попадания}. Вероятность события $\overline{X}$ равна $P(\overline{X}) = (1-p)^4$, тогда вероятность события X равна $P(X) = 1-(1-p)^4$. По условию эта вероятность равна 0,9984, откуда получаем уравнение относительно p

$$1-(1-p)^4 = 0{,}9984,$$

$$(1-p)^4 = 0{,}0016,$$

$$1-p = 0{,}2,$$

$$p = 0{,}8.$$

1.5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Важными следствиями теорем сложения и умножения являются формула полной вероятности события и формула Байеса.

Пусть событие A может произойти только с одним из событий H_i **,** образующих полную группу**.** Вычисляя вероятность события A, выдвигаем различные предположения H_i (*гипотезы*), относительно обстоятельств, которые могут привести к событию A.

Так как гипотезы H_1, H_2, …, H_n попарно несовместны, т.е. $H_i \cdot H_j = V$ при $i \neq j$, а событие A может произойти только с одним из событий H_i $(i = \overline{1,n})$, имеем $A = AU = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$.

События в правой части попарно несовместны, следовательно:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

К каждому из слагаемых в правой части применяем теорему умножения вероятностей:

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i), \ i = \overline{1,n}.$$

Тогда $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$ – *формула полной вероятности*.

Заметим, что в этой формуле $P(H_i)$ – вероятность гипотезы H_i до опыта. Если же эксперимент произведен, и событие A реализовалось, то можно провести переоценку гипотез, воспользовавшись *формулой Байеса*:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

где $P(H_i / A)$ вероятность гипотезы H_i после опыта.

Значение формулы Байеса состоит в том, что при наступлении события A, то есть по мере поступления новой информации, мы можем проверить и скорректировать выдвинутые до эксперимента гипотезы. Такой подход, называемый *байесовским*, дает возможность корректировать принятые решения.

Пример 1. Вероятность изготовления изделия с браком равна 0,08. После изготовления все изделия подвергаются проверке, в результате которой изделия без брака признаются годными с вероятностью 0,95, а изделия с браком – с вероятностью 0,06. Найти долю изделий, выпущенных после проверки, а также вероятность того, что выпущенное после проверки изделие окажется без брака.

Решение. Выскажем гипотезы: H_1 – изделие без брака, H_2 – изделие с браком. По условию $P(H_1) = 0{,}92$, $P(H_2) = 0{,}08$. Обозначим через A событие, состоящее в том, что изделие при проверке признается годным.

Имеем $P(A/H_1) = 0{,}95$; $P(A/H_2) = 0{,}06$.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}92 \cdot 0{,}95 + 0{,}08 \cdot 0{,}06 \approx 0{,}88.$$

Следовательно, после проверки признаются годными около 88% всех изготовленных изделий.

Ответ на второй вопрос задачи дает формула Байеса:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}92 \cdot 0{,}95}{0{,}88} = 0{,}995,$$

то есть среди изделий, прошедших проверку, содержится 99,5% изделий без брака.

1.6. Повторение независимых испытаний

Схемой Бернулли называется последовательность независимых опытов, в каждом из которых возможны лишь два исхода: появление события A или непоявление события A. Вероятность появления события A в каждом опыте постоянна и не зависит от номера испытания, равна $P(A) = p$, тогда вероятность его непоявления равна $P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Вероятность того, что событие A в n независимых испытаниях наступит m раз, вычисляют по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Пример 1. Что вероятнее выиграть в шахматы у равносильного партнера: три партии из четырех или пять из восьми?

Решение. Так как партнеры равносильны, то $p = q = \frac{1}{2}$, где p – вероятность выигрыша, q – вероятность проигрыша.

$$P_4(3) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{8}{32},$$

$$P_8(5) = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}.$$

Таким образом, $P_4(3) > P_8(5)$, т.е. вероятнее выиграть три партии из четырех.

Формула Бернулли становится неудобной при больших n. В этом случае применяют *локальную формулу Муавра-Лапласа*:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса.

Функция Гаусса обладает следующими свойствами:

1) функция четная: $\varphi(-x) = \varphi(x)$, поэтому ее график симметричен относительно оси OY;

2) $\varphi(x) > 0$ при всех x, т.е. график $y = \varphi(x)$ расположен строго выше оси OX;

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{n \to -\infty} \varphi(x) = 0$, т.е. ось OX является горизонтальной асимптотой графика этой функции; на практике полагаем $\varphi(x) \approx 0$ при $x > 5$.

Схематично график функции Гаусса изображен на рис. 1.5.

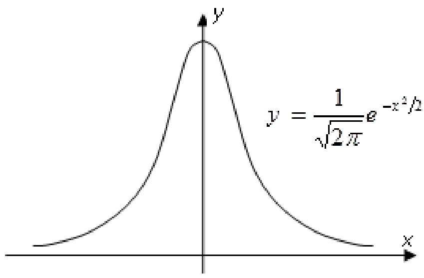

Рис. 1.5

Для функции Гаусса составлена таблица ее значений (см. прил. П.2).

Пример 2. Вычислить вероятность того, что при 100–кратном бросании монеты герб выпадет ровно 50 раз.

Решение. $n = 100$, $p = q = 0{,}5$, $m = 50$,

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = 0, \quad \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989,$$

$$P_{100}(50) = \frac{1}{5} 0{,}3989 \approx 0{,}08.$$

Если вероятность p в отдельном испытании близка к нулю, то даже при большом числе испытаний n, но при небольшой величине произведения np формула Муавра-Лапласа дает недостаточно точный результат. В этом случае удобно пользоваться *формулой Пуассона*:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$.

Замечание. Если $0 \le \lambda \le 10$, то формула Пуассона является хорошим приближением формулы Бернулли в случае, когда число опытов велико, а вероятность события A в каждом из них мала.

Пример 3. Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число изделий, повреждаемых при транспортировке, составляет 0,02%. Найти вероятность того, что из 10000 изделий будет повреждено по крайней мере 3.

Решение

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}), \text{ где } A = (m \ge 3),\ \overline{A} = (m < 3),$$

$$P(\overline{A}) = P(m = 0) + P(m = 1) + P(m = 2),$$

$$\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2,$$

$$P(m = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-2} \approx 0{,}135; \ P(m = 1) = \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} = \frac{2}{e^2} = 0{,}27;$$

$$P(m = 2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{2}{e^2} = 0{,}27; \quad P(\overline{A}) = 0{,}675.$$

Таким образом,

$$P(A) = 1 - 0{,}675 = 0{,}325.$$

В рассмотренных примерах решалась задача о нахождении вероятности того, что в n независимых испытаниях событие произойдет ровно m раз.
Однако в практическом отношении бóльшее значение имеет нахождение вероятности того, что число наступлений события окажется в границах от m_1 до m_2. В этом случае используют *интегральную теорему Муавра-Лапласа*.

Теорема. Пусть произведено n повторных независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A наступает с вероятностью p, причем число испытаний достаточно велико $(n \ge 100)$. Тогда вероятность того, что число m наступлений события A в этих n испытаниях будет заключено в границах от m_1 до m_2, вычисляется по следующей формуле

$$P(m_1 \le m \le m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$ – функция Лапласа, $q = 1 - p$.

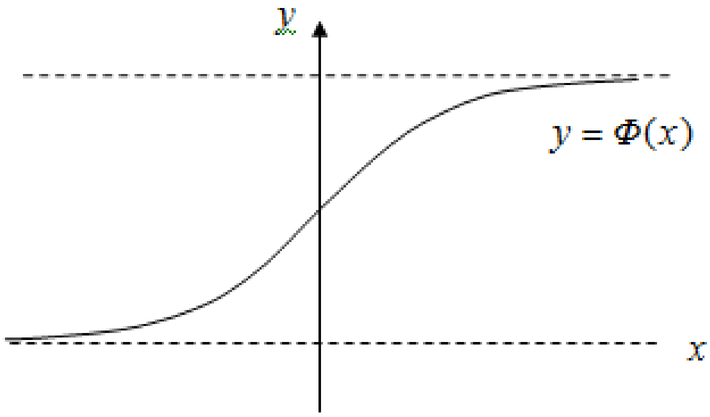

Рис. 1.6

Свойства функции Лапласа:

1.Функция Лапласа нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2.Функция Лапласа – монотонно возрастающая;

3. $\lim\limits_{n \to -\infty} \Phi(x) = -0{,}5$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \Phi(x) = 0{,}5$ т.е. прямые $y = 0{,}5$ и $y = -0{,}5$ являются горизонтальными асимптотами (правой и левой соответственно) графика $y = \Phi(x)$. На практике полагаем $\Phi(x) \approx 0{,}5$ при $x \ge 4$. График функции Лапласа схематично изображен на рис. 1.6.

Функция Лапласа табулирована при $x > 0$ (см. прил. П.1).

Пример 4. Каждая из 1000 деталей партии стандартна с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что число стандартных деталей этой партии будет не меньше 880.

Решение. Число n повторных независимых испытаний в данном случае равно числу деталей в партии (каждая из деталей партии будет проверяться на предмет качества, а в этой проверке и состоит испытание). $n = 1000 \ge 100$, поэтому интегральная теорема Муавра-Лапласа применима. Неравенство $(m \ge 880)$, где $m-$ число стандартных деталей в партии, здесь равносильно $(880 \le m \le 1000)$, поэтому $m_1 = 880$, $m_2 = 1000$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. $np = 1000 \cdot 0{,}9 = 900$, $npq = 1000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 90$.

Тогда $P(880 \le m \le 1000)\ \Phi\left(\frac{1000 - 900}{\sqrt{90}}\right) - \Phi\left(\frac{880 - 900}{\sqrt{90}}\right) = \Phi(10{,}5) - \Phi(-2{,}11)$.

По свойствам функции Лапласа, $\Phi(10{,}5) = 0{,}5$, $\Phi(-2{,}11) = -\Phi(2{,}11)$.
По таблице функции Лапласа (см. прил. П.1) находим $\Phi(-2{,}11) = 0{,}4825$.
Тогда окончательно имеем $P(880 \le m \le 1000) = 0{,}25 + \Phi(2{,}11) = 0{,}9825$.
Если выполнены условия применимости интегральной теоремы Муавра-Лапласа, то особый интерес представляют некоторые ее следствия.

Следствие 1. Вероятность того, что число m наступлений события A в n повторных независимых испытаниях будет отличаться от величины np не более чем на ε (по абсолютной величине), вычисляется по формуле

$$P(|m - np| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

Следствие 2. Вероятность того, что в n независимых испытаниях абсолютная величина отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ события A от его вероятности p не превзойдет данного положительного числа Δ, вычисляется по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \Delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Следствие 3. Обозначим $\sqrt{npq} = \sigma$ и вычислим вероятность события $|m - np| \le 3\sigma$.

$$P(|m - np| \le 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sqrt{npq}}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$$

или

$$P(np - 3\sigma \le m \le np + 3\sigma) \approx 0{,}9973.$$

Данное приближение называют *правилом трех сигм,* с помощью которого можно определить интервал практической достоверности события.

Пример 5. Подлежат исследованию 1000 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе равна 0,15. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9973 будет заключено число проб руды с промышленным содержанием металла.

Решение. Из следствия 3 $P(np - 3\sigma \le m \le np + 3\sigma) \approx 0{,}9973$. Искомые границы симметричны относительно величины np, где n=1000 и p=0,15. Найдем значение $3\sqrt{npq} = 3\sigma = 3\sqrt{1000 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} = 34$. Окончательно получаем границы:

$$np - 3\sigma = 1000 \cdot 0{,}15 - 34 = 116, \quad np + 3\sigma = 1000 \cdot 0{,}15 + 34 = 184,$$

т.е. с вероятностью 0,9973 число проб руды с промышленным содержанием металла (из данных 1000 проб) попадет в интервал (116; 184).

Пример 6. В лесхозе приживается в среднем 80% саженцев. Сколько саженцев надо посадить, чтобы с вероятностью 0,9981 можно было утверждать, что доля прижившихся саженцев будет находиться в границах от 0,75 до 0,85?

Решение. $p=\dfrac{80}{100}=0{,}8$ – вероятность прижиться для каждого из саженцев, $q=1-p=1-0{,}8=0{,}2$. Пусть n – необходимое число саженцев (искомая величина данной задачи) и m – число прижившихся из них, тогда m/n – доля прижившихся саженцев. По условию, $P\left(0{,}75\le\dfrac{m}{n}\le 0{,}85\right)=0{,}9981.$

Данные границы для доли m/n симметричны относительно величины $p=0{,}8$, поэтому неравенство $0{,}75\le\dfrac{m}{n}\le 0{,}85$ равносильно неравенству $\left|m/n-0{,}8\right|\le 0{,}05.$

Следовательно, вероятность 0,9981 – это та самая вероятность, которая вычисляется по следствию 2 из интегральной теоремы Муавра-Лапласа при $\Delta=0{,}05,\ p=0{,}8,\ q=0{,}2$.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}8\right|\le 0{,}05\right)=2\Phi\left(\frac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=0{,}9981.$$

По таблице функции Лапласа найдем такое значение t, при котором $2\Phi(t)=0{,}9981$. Это значение: $t=3{,}1.$

Тогда $\dfrac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}8\cdot 0{,}2}}=3{,}1\Rightarrow\sqrt{n}=3{,}1\dfrac{\sqrt{0{,}8\cdot 0{,}2}}{0{,}05}\Rightarrow n=\dfrac{3{,}1^2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}{0{,}05^2}=615{,}04\cong 616.$

Заметим, что значение n округлено до целых в большую сторону, чтобы обеспечить, как говорят, «запас по вероятности». Кроме того, видно, что полученное значение n достаточно велико (более 100), поэтому применение интегральной теоремы Муавра-Лапласа для решения данной задачи было возможно.

1.7. Контрольные вопросы

1. Что изучает теория вероятностей?
2. Основная числовая характеристика случайного события.
3. Как определяются случайное, достоверное и невозможное события?
4. Как подразделяются события по характеру совместной связи?
5. Классификация событий по степени возможности их проявления.
6. Приведите примеры полной группы событий.
7. Дайте классическое определение вероятности.

8. Дайте статистическое определение вероятности.
9. В чем отличие статистического определения вероятности от классического?
10. В чем разница абсолютной и относительной частоты?
11. Дайте определение произведения двух событий.
12. Как определяется вероятность появления хотя бы одного события?
13. Как определяется условная вероятность?
14. Сформулируйте теорему совместного появления двух событий.
15. Приведите формулу для вычисления вероятностей совместных событий.
16. При каких условиях применяется формула Байеса?
17. В каких случаях применяется формула полной вероятности? Каким свойствам должны удовлетворять гипотезы?
18. Что является схемой Бернулли?
19. При каких условиях для вычисления вероятности удобнее применить формулу Пуассона? При каких – локальную формулу Муавра–Лапласа?
20. Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласа и следствия из нее.
21. В чем состоит правило «трех сигм»?

1.8. Расчетные задания

1.8.1. Задание 1

1. Событие A – хотя бы одна из 5 машин на стоянке – легковая, событие B – все 5 машин на стоянке – грузовые. Что представляют собой следующие события:
а) $A+B$; б) $A\cdot B$; в) $A\cdot\overline{B}$; г) $\overline{A}\cdot B$?
При каких условиях события A и B окажутся независимыми?

2. Среди студентов, собравшихся на лекцию, выбирают наудачу одного. Событие A – выбран юноша; B – он не курит; C – он живет в общежитии.
а) описать событие $AB\overline{C}$;
б) когда справедливо соотношение $\overline{C}\subset B$;
в) при каком условии имеет место тождество $ABC = A$?

3. Событие A – хотя бы одна из 4 страниц содержит опечатки, событие B – все 4 страницы без опечаток. Что представляют собой следующие события: а) $A+B$; б) $A\cdot B$; в) $A\cdot\overline{B}$; г) $\overline{A}\cdot B$? При каких условиях события A и B окажутся независимыми?

4. Событие A – хотя бы один из 4 выбранных студентов живет в общежитии, событие B – все 4 студента живут не в общежитии. Что представляют собой следующие события: а) $A+B$; б) $A\cdot B$; в) $A\cdot\overline{B}$; г) $\overline{A}\cdot B$? При каких условиях события A и B окажутся независимыми?

5. Шарик бросают на стол и отмечают точку его попадания. Пусть событие A – попадание шарика внутрь круга A, событие B – попадание шарика внутрь круга B. Что представляют собой следующие события:

а) $\overline{A}$; б) $\overline{B}$; в) $A+B$; г) $\overline{A}\cdot\overline{B}$?

6. Событие A – все 9 лампочек в люстре горят, событие B – хотя бы одна из 9 лампочек не горит. Что представляют собой следующие события: а) $A+B$; б) $A\cdot B$; в) $A\cdot\overline{B}$; г) $\overline{A}\cdot B$? При каких условиях события A и B окажутся независимыми?

7. Опыт состоит в бросании двух монет. Пусть событие A – выпадение герба на первой монете, событие B – выпадение герба на второй монете. Что представляют собой следующие события: а) $A\cdot B$; б) $\overline{B}$; в) $\overline{A}\cdot\overline{B}$; г) $A+B$?

8. Событие A – хотя бы одна из 10 стоящих на полке книг – без картинок, событие B – все 10 книг с картинками. Что представляют собой следующие события: а) $A+B$; б) $A\cdot B$; в) $A\cdot\overline{B}$; г) $\overline{A}\cdot B$?
При каких условиях события A и B окажутся независимыми?

9. Событие A – все 5 задач решены правильно, событие B – хотя бы одна из 5 задач решена неправильно. Что представляют собой следующие события: а) $A+B$; б) $A\cdot B$; в) $A\cdot\overline{B}$; г) $\overline{A}\cdot B$? При каких условиях события A и B окажутся независимыми?

10. Событие A – хотя бы одна из 8 встреченных собак – не бульдог, событие B – все 8 встреченных собак – бульдоги. Что представляют собой следующие события: а) $A+B$; б) $A\cdot B$; в) $A\cdot\overline{B}$; г) $\overline{A}\cdot B$?
При каких условиях события A и B окажутся независимыми?

11. Событие A – все 7 вынутых из урны шариков черные, событие B – хотя бы один из 7 шариков не черный. Что представляют собой следующие события: а) $A+B$; б) $A\cdot B$; в) $A\cdot\overline{B}$; г) $\overline{A}\cdot B$? При каких условиях события A и B окажутся независимыми?

12. В урне красные, белые и синие шары. Событие A – наудачу взятый шар красного цвета, событие B – наудачу взятый шар – белый, событие C – наудачу взятый шар – синий. Что представляют собой следующие события: а) $A+B$; б) $A+C$; в) $\overline{A+C}$; г) $A\cdot B$?

13. Событие A – хотя бы один из 12 студентов знает теорему Лапласа, событие B – все 12 студентов не знают теорему Лапласа. Что представляют собой следующие события: а) $A+B$; б) $A\cdot B$; в) $A\cdot\overline{B}$; г) $\overline{A}\cdot B$? При каких условиях события A и B окажутся независимыми?

14. Событие A – хотя бы один из 6 телевизоров не работает, событие B – все 6 телевизоров исправны. Что представляют собой следующие события: а) $A+B$; б) $A\cdot B$; в) $A\cdot\overline{B}$; г) $\overline{A}\cdot B$? При каких условиях события A и B окажутся независимыми?

15. Среди студентов, собравшихся на лекцию, выбирают наудачу одного. Событие A – выбран юноша; B – он блондин; C – он изучает иностранные языки.
а) описать событие $AB\overline{C}$; б) когда справедливо соотношение $\overline{C}\subset B$;
в) при каком условии имеет место тождество $ABC = A$?

16. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что: а) произошло одно и только одно событие; б) ни одно событие не произошло; в) произошло не более двух событий.

17. Три исследователя, независимо один от другого, производят измерения некоторой физической величины. Рассматриваются события A_i: i-й исследователь допустил ошибку при считывании показаний прибора ($i=1,2,3$). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: A – хотя бы один из исследователей допустил ошибку; B – все три исследователя допустили ошибку; C – не меньше двух исследователей не допустили ошибку.

18. По радиоканалу передано три сообщения. Рассматриваются события A_i: i-е сообщение искажено помехами ($i=1,2,3$). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: A – искажено только одно сообщение; B – искажено хотя бы одно сообщение; C – ни одно сообщение не искажено.

19. Три исследователя, независимо один от другого, производят измерения некоторой физической величины. Рассматриваются события A_i: i-й исследователь допустил ошибку при считывании показаний прибора $(i=1,2,3)$. Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: A – все три исследователи не допустили ошибку; B – хотя бы один исследователь не допустил ошибку; C – не больше одного исследователя не допустили ошибку.

20. Бросаются три монеты. Рассматриваются события A – появление герба на первой монете; B – появление герба на второй монете; C – появление герба на третьей монете. Найти выражения для следующих событий:
а) появление хотя бы одного герба; б) появление одного герба и двух цифр; в) появление двух гербов.

21. По радиоканалу передано три сообщения. Рассматриваются события A_i: i-е сообщение искажено помехами ($i=1,2,3$). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: A – только второе сообщение искажено; B – первое и второе сообщения искажены; C – только два сообщения переданы верно.

22. Пусть A_i – событие, состоящее в том, что i-й ($i=1,2,3$) посетитель магазина сделал покупку. Записать следующие события:
а) первый посетитель ушел без покупки; б) кто-то купил; в) только один купил.

23. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что: а) все три события произошли; б) произошло, по крайней мере, одно из событий; в) произошло два и только два события.

24. По каналу связи последовательно принято три знака. Рассматриваются события A_i – принят i-знак $(i=1,2,3)$. Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: A – принят первый знак; B – принят, по крайней мере, один знак; C – принято два и только два знака.

25. По мишени стреляют три стрелка. Рассматриваются события A_i – попадание в мишень i-стрелка при одном выстреле. Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: A – ни одного попадания в мишень, B – только одно попадание в мишень, C – хотя бы одно попадание в мишень.

26. Два шахматиста играют подряд две партии. Обозначим события: A_i – в i-й партии выиграл первый игрок, B_i – в i-й партии выиграл второй игрок, C_i – ничья. Представить в виде сумм, произведений событий A_i, B_i, C_i следующие события: A – обе партии выиграл первый игрок; B – в первой выигрыш первого игрока, во второй – ничья; C – в первой – ничья, во второй – победа второго игрока.

27. По каналу связи последовательно принято три знака. Рассматриваются события A_i – принят i-знак $(i=1,2,3)$. Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: A – принято меньше двух знаков; B – принят один знак; C – принято три знака.

28. Пусть A_i – событие, состоящее в том, что i-й $(i=1,2,3)$ посетитель магазина сделал покупку. Составить следующие события:
а) второй посетитель ушел без покупки; б) только второй посетитель купил; в) двое ушли без покупки.

29. По мишени стреляют три стрелка. Рассматриваются события A_i – попадание в мишень i-го стрелка при одном выстреле. Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: A – только два попадания в мишень; B – хотя бы два попадания в мишень; C – три попадания в мишень.

30. Пусть события A_1 и A_2 означают попадание в мишень соответственно при первом и втором выстрелах. Выразить через A_1, A_2, $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ следующие события: A – ровно одно попадание в мишень при двух выстрелах; B – два попадания мишень при двух выстрелах; C – хотя бы одно попадание в мишень при двух выстрелах; D – ни одного попадания в мишень при двух выстрелах.

1.8.2. Задание 2

1. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

2. В конверте среди ста фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены десять фотографий. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

3. В группе двенадцать студентов, среди которых восемь отличников. По списку наудачу отобраны девять студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных пять отличников.

4. В ящике сто деталей, из них десять бракованных. Наудачу извлекли четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных:

а) нет брака; б) нет годных.

5. Саша и Ксюша договорились встречать Новый год в компании из десяти человек. Они очень хотели сидеть за праздничным столом рядом. Какова вероятность исполнения их желания, если места будут распределять путем жребия?

6. Тираж лотереи состоит из ста билетов, среди которых пятнадцать выигрышных. Найти вероятность выигрыша двух билетов для человека, купившего три билета.

7. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится тройка.

8. В коробке содержится шесть одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

9. В ящике содержится десять одинаковых деталей, помеченных номерами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Наудачу извлечены шесть деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных окажется деталь 1.

10. Условия задачи 9. Найти вероятность того, что среди извлеченных окажутся детали 1 и 2.

11. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них пять окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

12. В коробке имеется пять одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из букв : о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиках можно будет прочитать слово «спорт».

13. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв : а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти ве-

роятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «трос».

14. Восемь различных книг поставлены наудачу на одну полку. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся расположены рядом.

15. На полке книжного шкафа стоят десять различных книг, причем пять из них в мягком переплете, три книги в твердом переплете, а две без переплета. Найти вероятность того, что среди двух, взятых наудачу книг одна будет в мягком переплете, а вторая без переплета.

16. В партии из 12 деталей две детали бракованные, четыре детали первого сорта, а остальные второго сорта. Определить вероятность того, что среди отобранных наудачу трех деталей будут две детали второго сорта и одна деталь первого сорта.

17. В партии из 15 деталей десять стандартных. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу пяти деталей три будут стандартные.

18. Среди 17 студентов группы, из которых восемь девушек, разыгрывается семь билетов, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди выигравших билеты окажутся три девушки?

19. Из чисел 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 20 наудачу выбирают два числа. Найти вероятность того, что дробь, составленная из них, сократима.

20. В урне находится пять шаров, из которых два белых и три черных. Из урны наугад вынимается два шара. Найти вероятность того, что только один из них будет белым.

21. В корзине 10 зеленых и 20 красных яблок. Наугад взяли два яблока. Найти вероятность того, что взятые яблоки будут разного цвета.

22. В мешке находятся катушки ниток трех цветов. Из них 50% красных, 20% синих, а остальные белые. Какова вероятность того, что взятая наугад катушка будет красной или синей?

23. Отдельные тома некоторого пятитомного издания располагаются на книжной полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что случайно все книги окажутся выстроенными в нужном порядке?

24. Какова вероятность того, что при случайном расположении трехтомника стихотворений на книжной полке только первый том окажется на своем естественном месте?

25. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 125 кубиков одинакового размера. Все кубики перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь три окрашенные грани.

26. Некто выбирает наудачу шесть клеток «Спортлото» (шесть из сорока девяти). Найти вероятность того, что он правильно угадает из числа выигравших шести номеров ровно три.

27. Слово «керамит» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами перемешиваются и из них по очереди извлекаются четыре карточки. Какова вероятность того, что эти четыре карточки в порядке выхода составят слово «река»?

28. Из всех пятизначных чисел, записываемых цифрами 1, 2, 3, 4, 5 (без повторений), наугад выбрано одно число. Чему равна вероятность того, что оно не делится на пять?

29. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад составляется пятизначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что составленное число будет четным?

30. В одной семье четыре сестры по очереди моют посуду. Из каждых четырех разбитых тарелок три разбито младшей и поэтому ее называют неуклюжей. Справедливо ли это?

1.8.3. Задание 3

1. В круг вписали равносторонний треугольник. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник?

2. В круг вписали квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в квадрат?

3. В квадрат вписали круг. В квадрат наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в круг?

4. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 3$ провели биссектрису угла A. В прямоугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник?

5. На отрезок AB случайным образом бросается точка. Какова вероятность, что она более чем в 2 раза будет ближе к точке A чем к B?

6. В куб вписали шар. В куб случайным образом бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в шар?

7. Точки A и B принадлежат окружности. Дуга AB равна 60 градусам. Какова вероятность попадания на дугу точки, случайным образом брошенной на окружность?

8. В круг вписали прямоугольный треугольник. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник?

9. В круг вписали прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 60°$ На окружность наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет на дугу AB?

10. На грань куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ случайным образом ставится точка. Какова вероятность, что она попадет на грань $ABCD$?

11. В прямоугольнике со сторонами 3 и 4 расположен круг наибольшего радиуса. В прямоугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в круг?

12. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 5$ провели диагонали, пересекающиеся в точке O. В прямоугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник ABO?

13. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели плоскость ACB_1. В куб наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в пирамиду $ABCB_1$?

14. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. В ромб, случайным образом, бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник ABO?

15. В круг вписали квадрат $ABCD$. На окружность случайным образом бросается точка. Какова вероятность, что она попадет на дугу AB?

16. В прямоугольнике со сторонами 1 и 2 расположен круг наибольшего радиуса. В прямоугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в круг?

17. В круг вписали прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 30°$. На окружность наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет на дугу AB?

18. В круг вписали прямоугольный равнобедренный треугольник. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник?

19. В прямоугольный равнобедренный треугольник вписали круг. В треугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в круг?

20. В правильный шестиугольник $ABCDEF$ наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник ABC?

21. На стороны прямоугольника $ABCD$ (со сторонами $AB = 1$ и $BC = 2$) наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет на сторону CD?

22. В прямоугольном параллелепипеде со сторонами 1, 1, 2 расположен шар наибольшего радиуса. В параллелепипед наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в шар?

23. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели плоскость ACC_1. В куб наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в $ABCA_1B_1C_1$?

24. На отрезок AB случайным образом бросается точка. Какова вероятность, что она более чем в 3 раза будет ближе к точке B чем к A?

25. В круг вписали равносторонний шестиугольник. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в шестиугольник?

26. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 5$ провели биссектрису угла D. В прямоугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник?

27. В шар вписали куб. В шар случайным образом бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в куб?

28. В квадрате расположен наибольший равносторонний треугольник. В квадрат наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник?

29. В круг вписали равносторонний шестиугольник $ABCDEF$. На окружность наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет на дугу AC?

30. В ромб с острым углом $60°$ вписали круг. В ромб наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в круг?

1.8.4. Задание 4

1. Изготовитель может получить заявки от четырех потребителей с вероятностями соответственно 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4. Найти вероятность того, что поступит хотя бы одна заявка, если их поступления независимы.

2. Два студента сдают экзамен. Вероятность сдачи экзамена на «5» первым студентом равна 0,2, вторым – 0,5. Найти вероятность того, что хотя бы один студент сдаст экзамен на «5».

3. На садовом участке посажаны три дерева: вишня, слива, яблоня. Вероятность того, что приживется вишня, равна 0,6, слива – 0,7, яблоня-0,5.Какова вероятность, что все три дерева приживутся?

4. 160 студентов сдавали экзамены по математике и физике. Из них 15 человек не сдали математику и 35 человек – физику. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент не сдал математику и сдал физику.

5. Три радара контролируют некоторое пространство. Вероятность обнаружения цели для каждого 0,95; 0,96 и 0,9. Найти вероятность того, что хотя бы один из них обнаружит цель, если работают они независимо друг от друга.

6. Морское судно сохраняет управляемость, если действует хотя бы одна из двух энергетических установок, гребной винт и рулевое устройство. Вероятность надежной работы энергетических установок соответственно 0,95 и 0,9; гребного винта – 0,96 и рулевого устройства 0,85. Найти вероятность того, что судно останется управляемым, если все устройства работают независимо друг от друга.

7. Деталь последовательно проходит при изготовлении три операции, вероятность брака на каждой из которых соответственно равны 0,1; 0,2 и 0,3. Найти вероятность изготовления годной детали, если результаты операций не зависят друг от друга.

8. В приборе работают четыре последовательно соединенных элемента, вероятность выхода из строя которых равны соответственно 0,3; 0,2;

0,15 и 0,1. Найти вероятность безотказной работы прибора, если элементы работают независимо друг от друга.

9. В приборе независимо друг от друга работают четыре элемента с надежностью соответственно 0,7; 0,8; 0,85 и 0,9. Найти вероятность того, что хотя бы один элемент работает.

10. По цели производится стрельба из пяти зенитных установок. Вероятность попадания каждой из них 0,4. Какова вероятность того, что хотя бы одна из зенитных установок поразит цель?

11. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,8; для второго – 0,7; для третьего – 0,65. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

12. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,12; 0,01; 0,006 и 0,002. Найти вероятность того, что в результате опыта произойдет одно из этих событий.

13. Вероятность попадания в цель не зависит от номера выстрела и равна 0,3. Какова вероятность того, что цель будет поражена с третьего выстрела?

14. Вероятность работы без брака на одном станке равна 0,8. При каком количестве станков вероятность работы без брака становится меньше 0,4?

15. Вероятность выхода из строя одного автомобиля равно 0,6. При каком количестве машин их одновременная исправность становится меньше 0,2?

16. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутри круга наудачу поставлены четыре точки. Найти вероятность, что все четыре точки попадут в треугольник. Вероятность попадания точки в фигуру пропорционально площади фигуры и не зависит от ее расположения.

17. Отрезок разделен на четыре равные части. Отмечены четыре точки. Определить вероятность, что на каждую из четырех частей попадет по одной точке. Вероятность попадания точки на отрезок пропорционально длине отрезка и не зависит от ее расположения.

18. При каком количестве бросаний игрального кубика вероятность невыпадения цифры 6 становится меньше 0,3?

19. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. При каком количестве выстрелов вероятность ни разу не промахнуться становится меньше 0,3?

20. Произведено два выстрела по мишени. Вероятность попадания при первом выстреле 0,8, при втором 0,7. Найти вероятность того, что не будет промахов, если попадания происходят независимо друг от друга.

21. В условиях предыдущей задачи найти вероятность промахов при двух выстрелах.

22. Имеются три ящика. В первом ящике 3 белых и 5 черных шара, во втором ящике 5 белых и 3 черных шара, в третьем 5 белых. Из каждой вынули по шару. Какова вероятность, что вынутые шары белые?

23. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,8, для второго 0,85, для третьего 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

24. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

25. Контролер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий соответственно равна 0,85. Какова вероятность, что из двух проверенных изделий оба будут стандартными?

26. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

27. В первой урне 10 белых и 8 черных шаров, во второй 6 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по два шара. Какова вероятность, что вынутые шары окажутся белыми?

28. Вероятность своевременного выполнения задания тремя независимо работающими студентами соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним студентом.

29. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго эта вероятность равна 0,8.

30. В круг радиуса R вписан квадрат. Внутри круга наудачу поставлены четыре точки. Найти вероятность, что все четыре точки попадут в квадрат. Вероятность попадания точки в фигуру пропорционально площади фигуры и не зависит от ее расположения.

1.8.5. Задание 5

1. Определить вероятность того, что на экзамене первые два студента достанут билеты с нечётными номерами, а следующие четыре студента с чётными, если всего билетов 25 и все они тщательно перемешаны.

2. Определить вероятность того, что на экзамене первые три студента достанут билеты с чётными номерами, а следующие два студента с нечётными, если всего билетов 25 и все они тщательно перемешаны.

3. Студент выучил 25 из 30 экзаменационных вопросов. Экзамен считается сданным, если студент отвечает на три случайно выбранные вопроса. Если получен ответ на первый вопрос, то предлагается второй, а затем на тех же условиях третий. Какова вероятность того, что студент не ответит на третий вопрос?

4. Среди 25 экзаменационных билетов имеются 5, вопросы в которых наименее сложные. Определить вероятность того, что они достанутся студентам, которые в порядке очереди будут брать билет с 11-го по 15-тый, если всего в группе 25 человек.

5. Студент знает ответы на 15 из 20 экзаменационных вопросов. Если на экзамене достаётся невыученный вопрос, студент экзамен не сдаёт, но затем дома обязательно этот вопрос выучивает. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан только с третьей попытки.

6. В читальном зале библиотеки имеется 6 учебников по одному предмету, 3 из которых в жестком переплёте. Библиотекарь наугад выдаёт книги: сначала студенту Транспортного института, а затем двум студентам ИПТМ. Какова вероятность того, что студент-автомобилист получит книгу в жестком переплёте, а студенты-механики – в мягком.

7. В студенческой учебной группе 12 парней и 8 девушек. Наугад из списка группы выбрали двоих для работы в профкоме, а затем ещё двоих для участия в студсовете. Найти вероятность того, что в профкоме окажутся двое парней, а в студсовете – две девушки.

8. В интернет-магазине имелось 10 ноутбуков одной модели, в четырёх из которых не было установлено антивирусной программы. Два наугад выбранных ноутбука были проданы, а затем ещё три отложены для следующей продажи. Найти вероятность того, что в проданных ноутбуках имелась антивирусная программа, а в отложенных нет.

9. На складе имелось 15 планшетных компьютеров, 10 из которых на платформе Android и 5 на платформе Windows. Случайным образом были выбраны два компьютера для продажи в Нижнем Новгороде, а затем ещё один для продажи в Москве. Найти вероятность того, что оба проданных в Нижнем Новгороде компьютера работают на Android, а проданный в Москве – на платформе Windows.

10. В автосалоне готовы к продаже 10 автомобилей одной модели, на трёх из которых в качестве подарка установлено дополнительное оборудование. Найти вероятность того, что первым двум покупателям такой автомобиль не достанется, а третий покупатель его приобретёт.

11. В автотранспортной компании имеется 6 самосвалов одинаковой грузоподъёмности, четыре из которых марки МАЗ и два марки Volvo. Первая организация подала заявку на аренду трёх автомобилей, а затем вторая – на аренду двух. Найти вероятность того, что первая организация получит три МАЗа, а вторая – два Volvo, если автомобили распределяются случайным образом.

12. В организацию, занимающуюся ремонтом оборудования, поступило семь заявок, из них четыре от клиентов, находящихся в городе и три от клиентов из области. Слесари, приходящие на работу в случайной последовательности, сразу получают направление к клиенту. Найти вероятность того, что первый, пришедший на работу слесарь, поедет в область, а второй и третий будут работать в городе.

13. В лотерейном барабане находятся 20 пронумерованных шаров, два из которых имеют выигрышные номера. При остановке барабана извлекается один шар. Какова вероятность того, что первый выигрыш определится с четвёртой попытки?

14. Имеется колода из 36 хорошо перемешанных игральных карт. За один ход два игрока по очереди достают по одной карте. Выигрывает тот, кто первым достанет туза любой масти. Найти вероятность того, что первый игрок выиграет на третьем ходе.

15. Какова вероятность того, что две карты, по очереди наугад извлечённые из колоды в 36 карт, окажутся бубновой масти?

16. В турнире по шахматам принимают участие 12 одинаковых по силам команд, две из которых из Южной Америки. Найти вероятность того, что лучшая из южноамериканских команд будет только четвёртой.

17. В гонке принимают участие 14 автомобилей одинаковой мощности , 8 из которых имеют двигатель Mercedes. Какова вероятность того, что лучшая из таких машин будет на финише только третьей?

18. На автобазу в течение дня с равной возможностью может прибыть любая из пяти машин, следующих из Москвы, и любая из семи машин, следующих из Ярославля. Найти вероятность того, что первые две машины прибудут из Ярославля и только третья из Москвы.

19. На остановку могут прибывать автобусы десяти маршрутов, на трёх из которых пассажир может доехать до своей остановки. Считая, что за определённый промежуток времени к остановке равновозможен подход автобуса любого маршрута только по одному разу, определить вероятность того, что пассажир уедет только на четвёртом подошедшем автобусе.

20. Известно, что среди семи приборов два дают неточные показания. Приборы проверяют с помощью эталона. Найти вероятность того, что с третьей попытки будет найден первый неисправный прибор.

21. На складе автосервиса имеются 10 комплектов тормозных колодок, шесть из которых импортные. Для работы механику было выдано два случайно выбранных комплекта, а затем ещё два были отложены для следующего клиента. Найти вероятность того, что механик получил импортные комплекты, а отложенные комплекты были отечественные.

22. На склад доставили 10 генераторов, три из которых имеют скрытые дефекты. Найти вероятность того, что при поочерёдной проверке работоспособности только третий генератор окажется исправным.

23. В одном из отделов организации работает 8 человек: 5 экономистов и 3 юриста. Для проверки работы отдела случайным образом выбирают двух сотрудников. Какова вероятность того, что оба они окажутся юристами?

24. В благотворительной лотерее разыгрываются 300 билетов, 50 из которых выигрышные. Какова вероятность того, что три купленных билета окажутся выигрышными?

25. В салоне сотовой связи для реализации имеются 11 смартфонов Nokia одной модели, шесть из которых финской сборки и пять венгерской. Какова вероятность того, что первые два покупателя приобретут финские смартфоны, а третий покупатель- венгерский?

26. Какова вероятность, что три случайно выбранные карты из колоды в 36 карт окажутся тузами?

27. Какова вероятность, что первые две случайно выбранные карты из колоды в 36 карт окажутся тузами, а третья – валетом?

28. В черном ящике находятся 3 белых шара, 2 черных, и 5 красных. Найти вероятность того, что при выборке без возвращения первым будет вынут белый шар, затем чёрный, а затем подряд два красных.

29. Известно, что партия из 240 деталей содержит 5% бракованных изделий. Какова вероятность того, что первая случайно выбранная деталь окажется стандартной, а вторая бракованной?

30. Из чёрного ящика, содержащего 4 белых и 8 черных шаров, два игрока по очереди вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше вынет белый шар. Найти вероятность того, что первый игрок выиграет на третьем круге.

1.8.6. Задание 6

1. Два охотника стреляют по одной цели, причем каждый делает по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель для первого охотника равна 0,7, для второго – 0,8. Найти вероятность поражения цели.

2. Найти вероятность того, что задуманное двузначное число окажется кратным 2 или 5.

3. Среди студентов 60% занимаются спортом, 40% участвуют в научной работе кафедр и 20% занимаются спортом и наукой. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент занимается, по крайней мере, одним из двух указанных видов деятельности.

4. Три друга договорились встретиться на остановке в определенное время. Первый может опоздать с вероятностью 0,4, второй – с вероятностью 0,2, а третий придет на остановку вовремя с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы один из друзей не опоздает.

5. В одном ящике 5 красных и 10 белых шаров. В другом ящике – 3 белых и 4 синих шара. Из каждого ящика вынули по одному шару. Найти вероятность того, что хотя бы один из вынутых шаров, будет белым.

6. Вероятность выиграть на один лотерейный билет равна 0,8. Какова вероятность выиграть владельцу двух билетов?

7. Три танка делают по одному выстрелу и для поражения цели достаточно одного попадания. Вероятность попадания для первого танка равна 0,8, для второго – 0,6, для третьего – 0,9. Найти вероятность поражения цели.

8. Один студент знает 25 из 30 экзаменационных вопросов, другой – всего лишь 20. Экзаменатор задает каждому студенту по одному вопросу. Какова вероятность того, что хотя бы один студент ответит на предложенный ему вопрос?

9. Две радиолокационные станции обзора следят за появлением самолетов. Первая станция может обнаружить самолет с вероятностью 0,85, а вторая – 0,9. Какова вероятность обнаружения самолета хотя бы одной станцией?

10. Для аварийного отключения системы достаточно, чтобы сработал хотя бы один из трех независимо работающих сигнализаторов. Первый сигнализатор срабатывает при аварии с вероятностью 0,6, второй и третий сигнализаторы срабатывают с одинаковыми вероятностями – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии система будет отключена.

11. Вероятность ухудшения качества ткани из-за разнооттеночной окраски равна 0,01, а из-за полосатости – 0,02. Определить вероятность ухудшения качества ткани хотя бы по одной из указанных причин.

12. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число делится на 10 или 15.

13. Два стрелка делают по одному выстрелу в цель. Первый может промахнуться с вероятностью 0,3, а второй поражает цель с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что хотя бы один из стрелков промахнется?

14. Брошены два игральных кубика. Чему равна вероятность, что хотя бы на одном из них выпадет 5 очков?

15. Вероятность того, что в определенный день торговой базе понадобится двухтонная машина, равна 0,9, а пятитонная – 0,7. Найти вероятность того, что в указанный день понадобится хотя бы одна из этих машин.

16. В двух ящиках содержатся синие и красные шары. В первом ящике 6 красных и 5 синих шаров. Во втором – 3 синих и 7 красных. Из ящиков одновременно вынимают по одному шару. Какова вероятность, что, по крайней мере, один из вынутых шаров будет синим?

17. Два студента сдают экзамен. Один может получить пятерку с вероятностью 0,7, другой – 0,1. Какова вероятность того, что хотя бы один из студентов получит пятерку на экзамене?

18. Покупателю в магазине понравились сразу три вещи. С вероятностью 0,5 он купит первую вещь, с вероятностью 0,4 – вторую, а третью может купить с вероятностью 0.8. Какова вероятность того, что покупатель уйдет из магазина с покупкой?

19. Бросают две монеты. С какой вероятностью выпадет хотя бы один герб?

20. Студенту нужны три книги. Первую он обнаружит в библиотеке института с вероятностью 0,5, вторую – 0,9, а третью – с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что студент получит в библиотеке хотя бы одну нужную книгу?

21. В двух коробках находятся стандартные и нестандартные детали. В первой коробке 80% стандартных деталей, во второй – 90%. Из каждой коробки наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что из вынутых деталей хотя бы одна будет нестандартной.

22. Два пешехода одновременно отправились в путь. До захода солнца первый достигнет пункта назначения с вероятностью равной 0,7, другой – 0.8. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одного путника ночь не застанет в дороге.

23. В трех корзинах собраны грибы, причем в первой корзине белых грибов 20%,во второй – 15%, а в третьей – их в два раза меньше, чем в первой корзине. Из каждой корзины не глядя вынимают гриб. Какова вероятность того, что хотя бы один вынутый гриб окажется белым?

24. Задумано двузначное число. С какой вероятностью это число делится на 3 или 11?

25. Три контролера проверяют изделие на брак. Первый обнаруживает брак с вероятностью 0,9, второй – 0,8, а третий с вероятностью – 0,85. Какова вероятность того, что брак будет обнаружен хотя бы одним контролером?

26. За время T пассажир может уехать с остановки на автобусе с вероятностью 0,7 или на трамвае с вероятностью 0,5. Найти вероятность отъезда пассажира за время T.

27. Покупатель наметил посетить два магазина. К моменту его прихода первый магазин будет открыт с вероятностью 0,4, а второй – 0,9. Какова вероятность того, что он посетит хотя бы один магазин?

28. Три стрелка одновременно стреляют по цели, для поражения которой достаточно одного попадания. Вероятность того, что первый стрелок не промахнется, равна 0,6, для второго и третьего эти вероятности соответственно равны 0,4 и 0,5. Найти вероятность поражения цели.

29. В двух коробках лежат разноцветные кубики, причем в первой коробке красных кубиков 20% от общего числа, а во второй – 60%. Наугад из каждой коробки вынимают по одному кубику. Найти вероятность того, что хотя бы один вынутый кубик будет красным.

30. Студент может доехать до института на автобусе или троллейбусе. К моменту прихода студента на остановку автобус может подойти с вероятностью 0,8, а троллейбус – 0,6. Какова вероятность того, что студент сразу же уедет с остановки?

1.8.7. Задание 7

1. В компьютерном классе 50% компьютеров марки Hp, 28% – Lenovo, 22% – Acer. Определить вероятность того, что определенный студент в этом классе будет заниматься на компьютере Hp или Acer. Выбор компьютера происходит случайным образом.

2. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наугад извлеченных 3 деталей одна или две стандартные.

3. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и в кольца соответственно равны 0,2, 0,14, 0,1. Определить вероятность попадания в мишень.

4. Для производственной практики на 20 студентов представлено 8 мест на ГАЗ , 7 – на предприятие Сокол , 5 – на предприятие Термаль. Какова вероятность того, что 2 определенных студента попадут на практику на одно предприятие, если назначение студентов производится случайным образом?

5. Предприятие выпускает 20% продукции высшего сорта и 70% продукции первого сорта. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется высшего или первого сорта.

6. В партии из 10 деталей 4 дефектных. Найти вероятность того, что среди наугад извлеченных 5 деталей окажется более двух дефектных.

7. Каждое из трех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,12, 0,24, 0,11. Определить вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

8. В ящике 9 деталей, из которых 3 окрашены. Найти вероятность того, что хотя бы две из трех взятых наугад деталей окрашены.

9. Мастер обслуживает 5 станков. 20% рабочего времени он проводит у первого станка, 10% – у второго, 15% – у третьего, 25% – у четвертого, 30% – у пятого. Определить вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени он находится у первого или четвертого станка.

10. В партии из 8 изделий 3 дефектных. Из партии, случайным образом, выбирается для контроля 3 изделия. Партия бракуется, если окажется более двух дефектных изделий, выбранных для контроля. Найти вероятность того, что партия будет забракована.

11. На складе находятся 60 деталей, изготовленных 3 бригадами. Из них 20 изготовлено первой бригадой, 21 – второй, 19 – третьей. Определить вероятность поступления на сборку детали, изготовленной второй или третьей бригадой.

12. В партии из 12 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наугад извлеченных 5 деталей три или две стандартных.

13. В компьютерном классе 50% компьютеров марки Hp, 28% – Lenovo, 22% – Acer. Определить вероятность того, что определенный студент в этом классе будет заниматься на компьютере Hp или Lenovo. Выбор компьютера происходит случайным образом.

14. Для производственной практики на 25 студентов представлено 11 мест в Нижний Новгород, 9 – в Москву , 5 – в Санкт-Петербург. Какова вероятность того, что 3 определенных студента попадут на практику в один город, если назначение студентов производится случайным образом?

15. На складе находятся 20 деталей, изготовленных 3 бригадами. Из них 8 изготовлено первой бригадой, 7 – второй, 5 – третьей. Определить вероятность поступления на сборку детали, изготовленной второй или первой бригадой.

16. На предприятии 12 инженеров, из них 4 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену, мужчин окажется не менее двух.

17. Мастер обслуживает 5 станков. 20% рабочего времени он проводит у первого станка, 10% – у второго, 15% – у третьего, 25% – у четвертого, 30% – у пятого. Определить вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени он находится у первого или второго станка.

18. В ящике 8 деталей, из которых 3 окрашены. Найти вероятность того, что хотя бы две из трех взятых наугад деталей не окрашены.

19. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и концентрического кольца. Вероятности попадания в круг и в кольцо соответственно равны 0,35, 0,25. Определить вероятность попадания в мишень.

20. Из группы, состоящей из 3 студентов ИТС, 5 студентов ИНЕЛ и 4 студентов ИПТМ для спортивных соревнований, случайным образом, выбирается 2 человека. Какова вероятность того, что оба спортсмена из ИТС или ИНЕЛ?

21. На выборах за кандидата *A* проголосовало 40% избирателей, за кандидата *B* – 15%, за кандидата *C* – 20%. Какова вероятность того, что случайно выбранный бюллетень окажется за кандидата *B* или *C*?

22. В урне 2 красных шара, 3 синих и 7 белых. Найти вероятность того, что наугад извлеченные 2 шара будут оба синие или оба белые.

23. У рыбака три излюбленных места для ловли рыбы. На первом месте рыбак поймал 30% улова, на втором – 15%, на третьем – 55%. Какова вероятность того, что произвольно выбранная рыба из улова поймана на первом или на втором месте?

24. В партии из 14 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наугад извлеченных 4 деталей одна или две стандартные.

25. Студент разыскивает формулу в 3 справочниках. Вероятности того, что формула содержится в I, II, III справочниках, соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится только в одном справочнике.

26. На предприятии 18 инженеров, из них 8 - женщины. В смену занято 5 человек. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену, женщин окажется не менее четырех.

27. Партия изделий состоит из первого, второго и высшего сортов. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0.4, первого – 0.25, второго – 0.35. Найти вероятность того, что случайным образом выбранное изделие окажется второго или первого сортов.

28. Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, случайным образом предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответов на 8 вопросов из тех 40, которые могут быть предложены. Какова вероятность сдачи коллоквиума?

29. Группа из 20 студентов сдала экзамен следующим образом: на оценку "5" сдали 2 человека, на оценку "4" сдали 5 человек, на "3" сдали 12 человек, один не явился. Какова вероятность того, что случайно выбранный студент этой группы получил оценку "4" или "5"?

30. Три стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0.5, для второго 0.6, для третьего 0.4. Какова вероятность того, что в мишень попало ровно 2 пули?

1.8.8. Задание 8

1. В среднем из 100 клиентов отделения банка 60 обслуживаются первым операционистом и 40 – вторым операционистом. Вероятность того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет 0,9 и 0,75 соответственно для первого и второго служащих банка. Найти вероятность полного обслуживания клиентоа первым операционистом.

2. Вероятность изготовления изделия с браком равна 0,08. После изготовления все изделия подвергаются проверке, в результате которой изделия без брака признаются годными с вероятностью 0,95, а изделия с браком – с вероятностью 0,06. Найти вероятность того, что выпущенное после проверки изделие окажется без брака.

3. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

4. В ящик, содержащий три одинаковых детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находившихся в ящике.

5. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса – 4, из второй – 6, из третьей группы – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадет в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. Какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент?

6. В магазине приобретены 4 телевизора. Вероятности того, что они выдержат гарантийный срок службы соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того что наудачу выбранный телевизор выдержит срок гарантии.

7. В тире имеются 5 ружей, вероятности попаданий из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7;0,8; 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

8. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную – с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

9. Два станка производят детали. Один делает за смену 60% всех деталей, другой – 40%. Вероятность брака на первом станке 0,6, а на втором – 0,1. Выбранная деталь оказалась бракованной. Какова вероятность, что она сделана на первом станке?

10. Каждый из двух танков независимо сделал выстрел по некоторому объекту. Вероятность поражения цели первым танком 0,8, вторым – 0,4. Объект поражен одним попаданием. Определить вероятность того, что объект поражен первым танком.

11. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом 6 белых и 4 черных шара; во втором 7 белых и 8 черных; в третьем 3 белых и 7 черных шаров. Из наудачу выбранного ящика извлекают последовательно два шара. Какова вероятность, что первым появится белый шар, а вторым – черный?

12. На сборку поступают 500 деталей с первого автомата, 200 – со второго и 300 – с третьего. Процент брака среди деталей, изготовленных первым автоматом, равен 3%, вторым – 5% и третьим – 4%. Наудачу выбранная деталь оказалась бракованной. Определить наивероятнейшего изготовителя брака.

13. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен отлично.

14. 60% проезжающих мимо АЗС автомобилей – грузовые. Из них 20% обычно заезжают для заправки. Из легковых на заправку заезжают 35%. Найти вероятность того, что заехавший на заправку автомобиль – легковой.

15. 80% холодильников производятся на оборонных предприятиях и 20%- на гражданских. Брак оборонных заводов составляет 5%, гражданских- 12%. Купленный холодильник имеет брак. Какова вероятность того, что он произведен на оборонном заводе?

16. Имеется 3 ящика, содержащих каждый по 10 деталей. В первом 8 годных и 2 бракованных детали, во втором – 9 годных и 1 бракованная деталь и в третьем – 10 годных деталей. Выбираются наудачу 3 детали из одного ящика. Определить вероятность, что извлечение производилось из второго ящика, если известно, что среди отобранных оказалось 2 годных и 1 бракованная деталь.

17. В партии механизмов 50% первого сорта, 40% второго сорта и 10% третьего сорта. Брак среди механизмов каждого сорта составляет соответственно 2%, 4% и 7%. Механизм оказался бракованным. Какова вероятность, что он первого сорта?

18. Имеются две партии деталей в 12 и 10 штук. В первой партии 4 бракованных детали, во второй – 3. Из первой партии наудачу перекладывают 3 детали, после чего вынутая наудачу деталь оказалась стандартной. Определить наивероятнейший состав переложенных деталей.

19. Два завода производят одинаковую продукцию, причем первый дает 80%, а второй – 20%. Брак первого завода составляет 3%, второго – 12%. Взятый наугад образец оказался бракованным. Какова вероятность, что он сделан на втором заводе?

20. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% случаев работы прибора. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1, в ненормальном – 0,7. Найти полную вероятность выхода прибора из строя за время t.

21. Преподаватель опаздывает на занятие и решает воспользоваться любым видом транспорта, подошедшим первым. Если первым подойдет троллейбус, то он успевает к началу занятий с вероятностью 0,6, автобус – 0,8, маршрутное такси – 0,95, такси – 1. Соотношение всех видов транспорта 2:3:1:0,5. Найти вероятность того, что он успеет к началу занятий.

22. Поступающие в ОТК изделия осматриваются одним из четырех контролеров, каждый из которых обнаруживает дефект с вероятностью 0,93; 0,87; 0,95; 0,85 соответственно. Какова вероятность, что имеющее дефект изделие останется незамеченным?

23. Два автомата производят одинаковые детали, поступающие на общий конвейер. Производительность первого в 3 раза больше второго. Однако второй производит 90% деталей отличного качества, а первый лишь 65%. Найти вероятность выбора деталей с конвейера отличного качества.

24. В магазин поступили 10 телевизоров с завода города. *A*, 20 телевизоров с завода города *B*, 15 телевизоров с завода города. *C*, 15 телевизоров с завода города *D*. Вероятности брака соответственно равны 0,01; 0,15; 0,05; 0,08. Найти вероятность покупки бракованного изделия.

25. В магазин поступают электролампочки, изготовленные тремя заводами. Продукция первого завода содержит 3% брака, второго – 2%, третьего – 5%. 70% лампочек, имеющихся в магазине, изготовлены первым заводом, 20% – вторым. Найти вероятность того, что взятая наудачу лампочка окажется бракованной.

26. У рабочего 3 ящика с деталями. В первом из 25 деталей – 2 бракованных, во втором 24 детали годных и 1 бракованная, в третьем – все годные. Рабочий из наудачу выбранного ящика извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что одна из них бракованная.

27. Судно может встать под разгрузку на любой из 5 причалов. К моменту прихода судна, первый причал может освободиться с вероятностью 0,9; второй – 0,8; третий – 0,5; четвертый – 0,3; пятый – 0,7. Какова вероятность, что в момент прихода судно сразу встанет под разгрузку?

28. На конвейер поступают однотипные детали, обработанные бригадой рабочих из 5 человек, имеющих одинаковую производительность труда. Вероятность брака для 1–го и 4–го рабочего – 0,01, для 2–го – 0,03; для 3–го и 5–го рабочего – 0,02. Найти вероятность выбора бракованной детали.

29. В первом ящике 20 исправных и 6 дефектных деталей. Во втором 18 исправных деталей и 3 дефектных. Из первого ящика во второй перекладывают одно изделие. После этого из второго ящика берут наугад одно изделие. Найти вероятность того, что оно будет исправным.

30. Студент опаздывает на занятие и решает воспользоваться видом транспорта подошедшего первым. Если первым подойдет троллейбус, то он успевает к началу занятий с вероятностью 0,65; автобус – 0,75; маршрутное такси – 0,95. Найти вероятность того, что студент не опоздает на занятие, если соотношение между числом троллейбусов, автобусов и такси 2:3:1.

1.8.9. Задание 9

1. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равно 0,515. Какова вероятность того, что среди 10000 новорожденных мальчиков будет не больше, чем девочек?

2. В одном из экспериментов Пирсона, по моделированию на вычислительной машине опытов с подбрасыванием правильной монеты, из общего числа 24000 подбрасываний герб выпал 12012 раз. Какова априорная вероятность получить данный результат?

3. Автоматическая штамповка клемм для предохранителей дает 10% отклонений от принятого стандарта. Сколько стандартных клемм следует ожидать с вероятностью 0,0587 среди 400 клемм?

4. Вероятность рождения мальчика p=0,512. Считая применимыми локальную и интегральную теоремы Муавра–Лапласа, вычислить вероятности событий:

а) среди 100 новорожденных будет 51 мальчик;

б) среди 100 новорожденных будет больше мальчиков, чем девочек.

5. В страховой компании застраховано 10000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 1200 руб. страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 100000 руб. Найти вероятность того, что по истечении года работы страховая компания потерпит убыток.

6. На факультете 730 студентов. С помощью локальной теоремы Муавра-Лапласа найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1–го января, и вероятность того, что найдутся три студента, родившиеся в один и тот же день.

7. Средний процент нарушения работы монитора в течение гарантийного срока равен 12. Вычислить вероятность того, что из 46 наблюдаемых мониторов более 36 выдержат гарантийный срок.

8. Проведено 700 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна 0,7. Найти вероятность того, что частота появлений события A окажется заключенной между 460 и 600.

9. В некотором семействе имеется 10 детей. Вероятность рождения мальчика и девочки равна 0,5. Найти вероятность:

а) того, что в семье мальчиков и девочек поровну;

б) того, что число мальчиков заключено между 3 и 8.

10. По полосе укреплений противника сбрасывается 100 серий бомб. При сбрасывании одной такой серии математическое ожидание числа попаданий равно 2, а среднее квадратическое отклонение числа попаданий равно 1,5. Найти приближенно вероятность того, что при сбрасывании 100 серий в полосу попадет от 180 до 200 бомб.

11. Английский биолог и статистик Пирсон, подбросив 12000 монету, получил частость выпадения герба 0,5016. Найти вероятность получения такой частости при повторном опыте.

12. При массовом производстве полупроводниковых диодов брак при формовке составляет 2%. Сколько диодов должна содержать опытная партия, чтобы с вероятностью, равной 0,93, отклонение от указанного процента брака не превысило 0,05?

13. На склад поступает продукция трех фабрик, причем изделия первой фабрики на складе составляют 30%, второй – 32% и третьей – 38%. Продукция первой фабрики содержит 60% изделий высшего сорта, второй – 25%, третьей – 50%. Найти вероятность того, что среди 300 наудачу взятых со склада изделий число изделий высшего сорта заключено между 130 и 170.

14. В XVIII веке французский ученый Бюффон бросил монету 4040 раз, причем герб выпал 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота (частость) появления герба отклонится от вероятности по абсолютной величине не более чем в опыте Бюффона.

15. Всхожесть семян кукурузы в некоторых условиях составляет 83%. Найти границы для частости взошедших семян из 1000 посеянных, если эти границы надо гарантировать с вероятностью, не меньшей 0,9.

16. При изготовлении радиоламп в среднем бывает 2% брака. Найти вероятность того, что в партии из 400 радиоламп число годных заключено от 385 до 395.

17. Монета была подброшена 40 раз. Пользуясь локальной теоремой Муавра-Лапласа, найти вероятность того, что герб выпадет в 25 случаях.

18. При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 70% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число первосортных заключено между 652 и 760?

19. Посажено 600 семян кукурузы с вероятностью 0,9 прорастания для каждого семени. Найти границу абсолютной величины отклонения частости взошедших семян от вероятности 0,9, если эта граница должна быть гарантирована с вероятностью 0,995.

20. Стрелок сделал 30 выстрелов с вероятностью попадания при отдельном выстреле 0,3. Найти вероятность того, что при этом будет 8 попаданий.

21. С конвейера сходит в среднем 85% изделий первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,997 отклонение частости изделий первого сорта в них от 0,85 по абсолютной величине не превосходило 0,01?

22. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий число изделий высшего сорта заключено между 600 и 700, если вероятность, что отдельное изделие будет высшего сорта, равна 0,62.

23. В ящике 10 револьверов одной системы и одинаковых с виду; из них 4 непристрелянных. Вероятность попадания в цель из непристрелянного револьвера равна 0,3, а из пристрелянного – 0,9. Из взятого наудачу револьвера произведено 200 выстрелов по цели. Чему равна вероятность того, что число попаданий в цель заключено между 120 и 150?

24. Найти такое число k, чтобы с вероятностью, приблизительно равной 0,7, число выпадений герба при 4000 бросаниях монеты было заключено между 3000 и k.

25. Вероятность попадания в мишень при каждом из 700 выстрелов равна 0,4. Какое максимально возможное отклонение частости от вероятности попадания при отдельном выстреле можно ожидать с вероятностью 0,997?

26. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,4. Найти вероятность того, что из 26 наугад взятых деталей, изготовленных на данном станке, половина окажется высшего сорта.

27. Взято 800 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе одинакова и равна 0,3. Считая событие, вероятность наступления которого 0,997, достоверным, найти границы числа проб с промышленным содержанием руды во взятой партии проб

28. Среди продукции, изготовленной на данном станке, брак составляет 2%. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,995 можно было ожидать, что частость бракованных изделий среди них отличается от 0,02 по абсолютной величине не более чем на 0,05?

29. Приняв вероятность рождения мальчика равной 0,515, найти вероятность того, что среди 80 новорожденных ровно 42 мальчика.

30. Вероятность несчастного случая в течение года для каждого работника на производстве составляет 0,006. Застрахованы на один год 1000 работников. Страховой взнос каждого из них составил 150 руб. При наступлении несчастного случая выплачивается 12000 руб. Какова вероятность того, что к концу года страховое учреждение окажется в убытке?

ГЛАВА 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Классификация случайной величины

Случайной называется величина, которая в результате испытания принимает только одно значение из возможного множества своих значений, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин. Описать случайную величину можно с помощью ее закона распределения.

Законом распределения случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Различают два вида случайных величин: дискретные и непрерывные.

Дискретная случайная величина это величина, принимающая конечное или счетное множество значений. Ее значения отделимы друг от друга.

Например:

– число появлений герба при трех бросаниях монеты (возможные значения 0, 1, 2, 3);
– частота появления герба в том же опыте (возможные значения $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$);
– число отказавших элементов в приборе, состоящем из пяти элементов (возможные значения 0, 1, 2; 3, 4, 5);
– количество студентов на лекции (возможные значения 0, 1, 2,….n).

Непрерывная случайная величина это величина, возможные значения которой неотделимы друг от друга и непрерывно заполняют некоторый интервал.

Например:

– абсцисса (ордината) точки попадания при выстреле;
– расстояние от точки попадания до центра мишени;
– ошибка измерителя высоты;
– продолжительность лекции.

2.2. Законы распределения дискретных случайных величин

2.2.1. Ряд распределения. Многоугольник распределения

Функция распределения

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде *ряда распределения* – таблицы, в первой строке которой указаны все возможные значения случайной величины, а во второй строке соответствующие вероятности этих значений, т.е. (табл. 2.1).

Таблица 2.1

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Так как в одном испытании случайная величина X принимает одно и только одно возможное значение, то события $X = x_i$ ($i = \overline{1,n}$) образуют полную группу. Следовательно, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Закон распределения дискретной случайной величины X можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят ломаную, соединяющую последовательно точки с координатами $(x_i;p_i)$, $i=1,2,\ldots n$. Полученную линию называют *многоугольником распределения* (рис. 2.1).

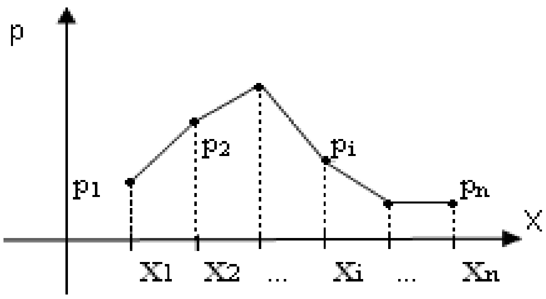

Рис. 2.1

Замечания 1. Сумма все ординат многоугольника распределения равна единице.

Замечания 2. При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности.

Наиболее общей формой закона распределения является *функция распределения*, представляющая собой вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем заданное x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое изображается на числовой прямой точкой, лежащей левее точки x.

Свойства функции распределения:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$;

2) $F(x)$ – неубывающая функция на $(-\infty;+\infty)$;

3) $F(x)$ – в точках $x = x_i$ ($i=1,2,\ldots n$) непрерывна слева и непрерывна во всех остальных точках;

4) $F(-\infty)=P(X<-\infty)=0$ как вероятность невозможного события, $F(+\infty)=P(X<+\infty)=1$ как вероятность достоверного события.

Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i), \text{ т.е.}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le x_1,\\ p_1, & x_1<x\le x_2,\\ p_1+p_2, & x_2<x\le x_3,\\ \ldots, & \ldots,\\ 1, & x>x_n.\end{cases}$$

Её график изображен на рис. 2.2.

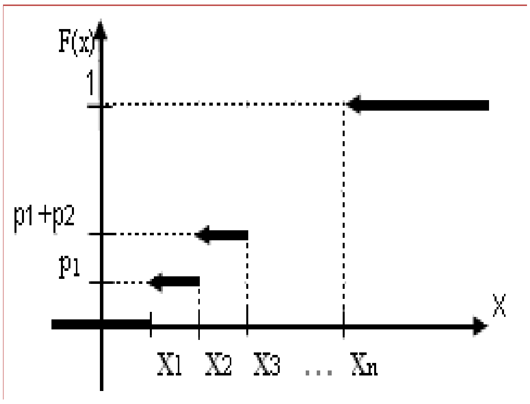

Рис. 2.2

Для дискретной случайной величины функция распределения есть разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева.

Пример 1. Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. Рассматривается случайная величина X – число появлений события A в трех опытах.

Построить:

а) ряд и многоугольник распределения;

б) функцию распределения случайной величины X.

в) найти вероятность событий: A={X<2}; $B=\{1\le X\le 3\}$; $C=\{1< X\le 3\}$.

Решение

а. Случайная величина X может принимать значения $x_0=0$; $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$. Соответствующие им вероятности p_0, p_1, p_2, p_3 найдем, воспользовавшись формулой Бернулли. При n=3, $p=0{,}4$; $q=1-p=0{,}6$ имеем

$$p_0=P_3(0)=C_3^0p^0q^3=(0{,}6)^3=0{,}216;$$

$$p_1=P_3(1)=C_3^1pq^2=3\cdot 0{,}4\cdot(0{,}6)^2=0{,}432;$$

$$p_2=P_3(2)=C_3^2p^2q=3\cdot(0{,}4)^2\cdot 0{,}6=0{,}288;$$

$$p_3=P_3(3)=C_3^3p^3q^0=(0{,}4)^3=0{,}064.$$

Отсюда ряд распределения случайной величины X имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

$$\sum_{i=0}^{3} p_i = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1.$$

Многоугольник распределения случайной величины X представлен на рис. 2.3

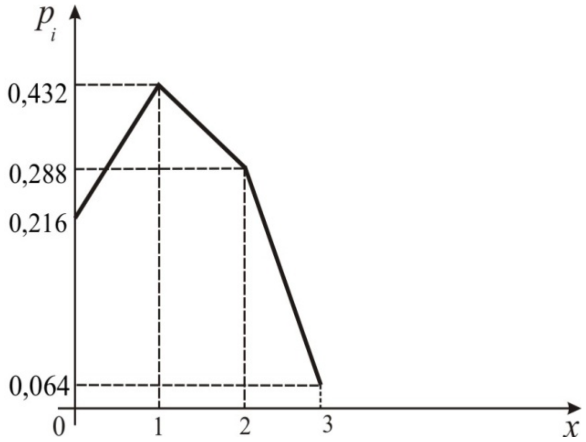

Рис. 2.3

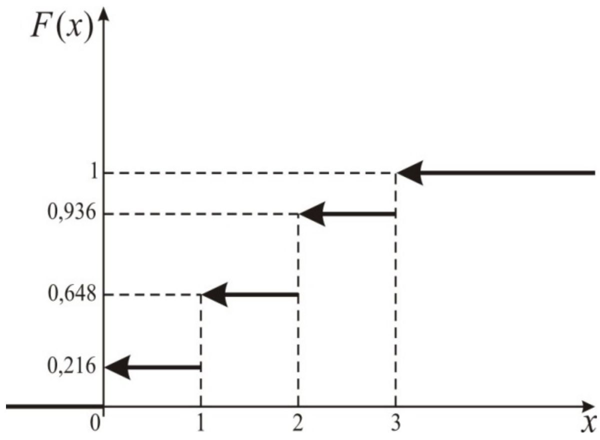

Рис. 2.4

б. Найдем функцию распределения $F(x)$.

По определению функции распределения имеем

Если $x \le 0$, то $F(x) = P(X < x) = 0$, так как на $(-\infty;\ x)$ нет ни одного значения данной случайной величины.

Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}216$ (так как в промежуток $(-\infty;\ x)$ попадает только одно значение $x = 0$).

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648$ (так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадают два значения $x=0$ и $x=1$).

Если $2 < x \le 3$, то

$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 = 0{,}936,$

(так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадают три значения $x=0$, $x=1$ и $x=2$).

Если $3 < x$, то

$$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$
$$= 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1,$$

(так как в промежуток $(-\infty;\ x)$ попадают все четыре значения $x=0$, $x=1$, $x=2$ и $x=3$).

Итак, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ 0{,}216, & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}648, & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}936, & \text{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если} \quad 3 < x. \end{cases}$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 2.4

в. Найдем вероятности событий: $A=\{X<2\}$; $B=\{1 \le X \le 3\}$;С$=\{1 < X \le 3\}$:

$$P(A)=P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}216+0{,}432=0{,}648;$$
$$P(B)=P(1\le X<3)=P(X=1)+P(X=2)=0{,}432+0{,}288=0{,}72;$$
$$P(C)=P(1<X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)=0{,}288+0{,}064=0{,}352.$$

2.2.2. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Закон распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако при решении многих практических задач достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, выражающие наиболее характерные свойства закона распределения случайной величины. Такие числа носят название *числовых характеристик* случайной величины. Среди них различают характеристики положения и разброса. Характеристикой положения является математическое ожидание.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n.$$

Математическое ожидание служит характеристикой среднего значения случайной величины (так называемое средневзвешенное значение).

Свойства математического ожидания:

1) $M(C)=C$, где C – постоянная величина;

2) $M(CX)=CM(X)$;

3) $M(X\pm Y) = M(X) \pm M(Y)$;

4) $M(XY)=M(X)M(Y)$, где X,Y – независимые случайные величины.

Следствия:

$$M(X\pm C)=M(X)\pm C,$$

где C – постоянная величина;

$$M(X-M(X)) = 0.$$

Математическое ожидание характеризует центр распределения, но не отвечает на вопрос, как распределена величина относительно этого центра. Для ответа на этот вопрос используются характеристики разброса – дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M(X-M(X))^2.$$

Эту формулу можно преобразовать, используя свойства математического ожидания, к виду

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

где

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n.$$

Дисперсия служит для характеристики степени рассеивания возможных значений дискретной случайной величины вокруг ее среднего значения.

Свойства дисперсии:

1) $D(C) = 0$, где C – постоянная величина;
2) $D(X) > 0$;
3) $D(CX) = C^2D(X)$, где C – постоянная величина;
4) $D(X+Y) = D(X)+D(Y)$, где X,Y – независимые случайные величины.

Дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому вводят величину $\sqrt{D(X)} = \sigma_x$, которая называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины X и имеет ту же размерность, что и $M(X)$.

Модой $M_0(X)$ дискретной случайной величины X называется ее наиболее вероятное значение (рис. 2.5).

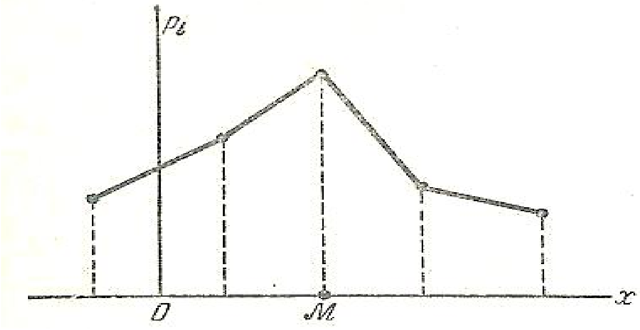

Рис. 2.5

Если многоугольник распределения имеет два или несколько максимумов, то распределение называется *мономодальным*, если один – *унимодальным.*

Пример 1. Дан ряд распределения дискретной случайной величины X (табл.2.2).

Таблица 2.2

x_i	10	20	30	40	50	60
p_i	0,24	0,36	0,20	0,15	0,03	0,02

Найти моду.

Решение. Так как дискретная случайная величина X принимает значение $x_2 = 20$ с наибольшей вероятностью $p_2 = 0{,}36$ по сравнению с двумя соседними значениями, то мода случайной величины X равна 20, т. е. $M_0(X) = 20$ и распределение является унимодальным.

Пример 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения (табл. 2.3).

Таблица 2.3

x	–1	0	1	2	3
p	0,1	p_2	0,3	0,2	0,3

Найти: $p_2, M(X), D(X), \sigma(X), M_0(X)$.

Решение. Так как сумма вероятностей возможных значений случайной величины X равна 1, то $p_2, = 1-(0{,}1+0{,}3+0{,}2+0{,}3) = 0{,}1.$
Найдем числовые характеристики случайной величины:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = -1\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}3 = 1{,}5.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i - M^2(X) =$$

$$= (-1)^2\cdot 0{,}1 + 1^2\cdot 0{,}3 + 2^2\cdot 0{,}2 + 3^2\cdot 0{,}3 - 1{,}5^2 = 1{,}65.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1{,}65} \approx 1{,}2845.$$

$M_0(X)$ = 1 и $M_0(X)$ = 3 ,так как $p_3 = p_5 = 0{,}3.$
Данное распределение является *мономодальным.*

2.2.3. Примеры дискретных законов распределения

Геометрическое распределение

Пусть X – число испытаний до первого «успеха», при условии, что вероятность «успеха» в каждой попытке не зависит от результатов предыдущих и сохраняет постоянное значение p.
Величина X – дискретная случайная величина, возможными значениями которой служат натуральные числа $k = 1, 2, ..., n, ...$
Событие (X = 1) означает «успех» с первого раза, поэтому $P(X = 1) = p$.
Событие (X = 2) означает «успех» со второго раза,означает «провал» при первой попытке и «успех» при второй попытке. В этом случае $P(X = 2) = qp$,где $q = 1 - p$. Продолжая эти рассуждения, приходим к общей формуле $P(X = k) = q^{k-1}p$. В этом случае говорят, что дискретная случайная величина X распределена согласно *геометрическому закону.*
Ряд геометрического распределения случайной величины имеет вид (табл. 2.4)

Таблица 2.4

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	p	pq	pq^2	…	pq^{k-1}	…

Нетрудно видеть, что вероятности p_i образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q. Отсюда название – *геометрическое распределение.*

Определение ряда распределения корректно, так как

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p(1+q+q^2+...) = p\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Отметим, что $M(X) = \dfrac{1}{p}$, $D(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

Пример 1. Электрик, имеющий 4 лампочки в запасе, меняет перегоревшую. Построить ряд распределения числа израсходованных лампочек, если вероятность неисправности каждой равна 0,6. Вычислить $M(X)$, $D(X)$.

Решение. Пусть X – число использованных лампочек. По условию $q = 1 - p = 0{,}6$ Откуда p=0,4. Так как замена происходит до обнаружения исправной лампочки, применим формулу $P(X = k) = q^{k-1}p$, где $k = 1, 2, 3, 4$.

Событие (X=1) означает «успех» с первого раза, поэтому $P(X$=1) = p=0,4.

Событие (X = 2) означает «успех» со второго раза а, значит, первая лампочка оказалась неисправной. В этом случае $P(X = 2) = qp$=0,6 0,4=0,24.

Аналогично рассуждая, имеем $P(X = 3) = q^{3-1}p=0{,}6^2 0{,}4=0{,}144$.

Случай (X=4) – израсходовано 4 лампочки, возможен как при исправной последней лампочке, так и при неисправной. Поэтому

$$P(X = 4) = q^{4-1}p+q^4 = 0{,}6^3 0{,}4+0{,}6^4=0{,}216.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид (табл. 2.5)

Таблица 2.5

x_i	1	3	4
p_i	0,4	0,144	0,216

Контроль: 0,4+0,24+0,144+0,216=1.

$$M(X) = \frac{1}{0{,}4} = \frac{5}{2},\quad D(X) = \frac{0{,}6}{0{,}4^2} = \frac{3}{8}.$$

Биномиальное распределение

Биномиальным называется закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события A в n независимых повторных испытаниях, в каждом из которых события A может наступить с вероятностью р или не наступить с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда $P(X = m)$ – вероятность появления события A ровно m раз в n испытаниях вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, находят по формулам

$$M(X)=np,\ D(X)=npq.$$

Пример 1. Составить закон распределения случайной величины X – числа выпадений пятерки при трех бросаниях игральной кости. Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ этой величины.

Решение. Испытание состоит в одном бросании игральной кости. Так как кость бросается 3 раза, то число испытаний n=3.
Вероятность события A – «выпадение пятерки» в каждом испытании одна и та же и равна 1/6, т.е. $P(A)=p=1/6$, тогда $P(\overline{A})=1-p=q=5/6$, где $\overline{A}$ – «выпадения не пятерки».
Случайная величина X может принимать значения: 0;1;2;3.
Вероятность каждого из возможных значений X найдем по формуле Бернулли:

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0p^0q^3=1(1/6)^0(5/6)^3=125/216;$$

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1p^1q^2=3(1/6)^1(5/6)^2=75/216;$$

$$P(X=2)=\mathrm{P}_3(2)=C_3^2p^2q=3(1/6)^2(5/6)^1=15/216;$$

$$P(X=3)=\mathrm{P}_3(3)=C_3^3p^3q^0=1(1/6)^3(5/6)^0=1/216.$$

Закон распределения случайной величины X имеет вид (табл. 2.6).

Таблица 2.6

x	0	1	2	3
p	125/216	75/216	15/216	1/216

Контроль: 125/216+75/216+15/216+1/216=1.

Найдем числовые характеристики случайной величины X:
$M(X)=np=3(1/6)=1/2$,
$D(X)=npq=3(1/6)\,(5/6)=5/12$,

$$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{\frac{5}{12}}=\frac{\sqrt{15}}{6}.$$

Распределение Пуассона

Если число испытаний n очень велико, а вероятность появления события A в каждом испытании очень мала ($p\leq 0{,}1$), то для вычисления $P(X=m)$ используют формулу Пуассона:

$$P(X=m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},$$ где $m=0, 1, 2, \ldots n$, где $\lambda=np$ – параметр закона.

Тогда говорят, что случайная величина X распределена *по закону Пуассона.*
Математическое ожидание и дисперсия равны параметру закона

$$M(X)=D(X)=\lambda.$$

Пример 1. Станок–автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 1000 отобранных деталей окажется:
а) 5 бракованных;
б) хотя бы одна бракованная.

Решение. Число n=1000 велико, вероятность изготовления бракованной детали p = 0,002 мала, и рассматриваемые события (деталь окажется бракованной) независимы, поэтому применим закон Пуассона:

$$P(X=m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Найдем параметр закона: $\lambda = np = 1000\cdot 0{,}002=2$.
а. Найдем вероятность того, что будет 5 бракованных деталей (m=5):

$$P(X=5)\approx\frac{2^5}{5!}e^{-2}=0{,}0361.$$

б. Найдем вероятность того, что будет хотя бы одна бракованная деталь. Событие A – «хотя бы одна из отобранных деталей бракованная» является противоположным событию $\overline{A}$ – «все отобранные детали небракованные». Следовательно, P(A)=1 – $P\left(\overline{A}\right)$. Отсюда искомая вероятность равна

$$P(A)=1-P(X=0)\approx 1-\frac{2^0}{0!}e^{-2}=0{,}865.$$

Пример 2. Для случайной величины X, имеющей распределение Пуассона вероятность события $X=0$ равна 0,4. Найти вероятность события $X>2$.

Решение. Из формулы $P(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$ для $m=0$ $P(0)=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}$, $0{,}4=e^{-\lambda}$ $\Rightarrow$ $\lambda=-\ln 0{,}4=0{,}92$.

Тогда $P(X>2)=P(k>2)=1-P(k\le 2)=1-(P(0)+P(1)+P(2))=$

$$=1-\left(\frac{(0{,}92)^0}{0!}e^{-0{,}92}+\frac{0{,}92}{1!}e^{-0{,}92}+\frac{(0{,}92)^2}{2!}e^{-0{,}92}\right)=1-(1+0{,}92+0{,}42)e^{-0{,}92}=$$

$$=1-2{,}34\cdot 0{,}4=0{,}06.$$

Замечание. От свойства закона Пуассона – приближенно заменять биномиальное распределение при большом числе опытов и малой вероятности наступления события в каждом опыте – происходит его название – *закон редких явлений*.

2.3. Законы распределения непрерывных случайных величин

2.3.1. Функция распределения. Плотность распределения вероятностей

Можно сформулировать еще одно определение непрерывной случайной величины. Случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения всюду непрерывна, а производная функции распределения непрерывна во всех точках за исключением, быть может, конечного числа точек на любом конечном интервале.

Функция распределения непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной случайной величины:

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию распределения называют так же *интегральной функцией* распределения.

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$, так как $F(x)$ выражает вероятность событий;

2) вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно отдельное значение равна 0. $P(X = c) = 0,\ \forall\, c \in R$;

3) $P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1,\ \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0.$

Плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная от ее функции распределения, т.е.

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения вероятностей называют так же *дифференциальной функцией* распределения, или *дифференциальным законом распределения.*

График функции плотности распределения вероятностей $f(x)$ называется *кривой распределения вероятностей*.

Свойства плотности распределения вероятностей:

1) $f(x) \ge 0$,при $x \in R$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x)$. Геометрически функция распределения равна площади фигуры, ограниченной сверху кривой распределения снизу осью OX и лежащей левее точки x (рис. 2.6);

3) $P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = S_{\text{трап}}$. Геометрически полученная вероятность равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой распределения, снизу осью OX, слева прямой $x = \alpha$, справа $x = \beta$ (рис. 2.7);

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ – условие нормировки.

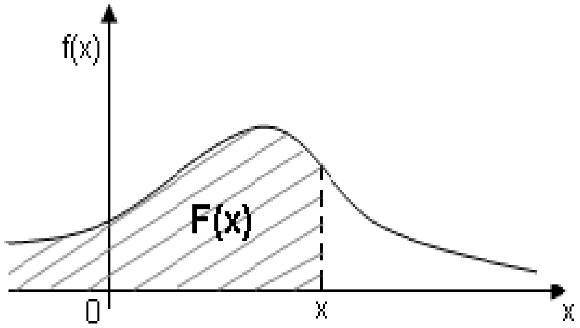

Рис. 2.6

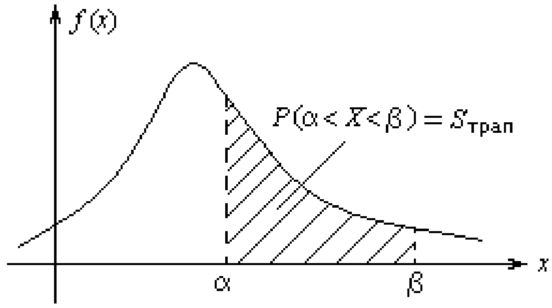

Рис. 2.7

Пример 1. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ c(x-2) & \text{при} \quad 2 < x \le 6, \\ 0 & \text{при} \quad x > 6; \end{cases}$$

а) найти значение c и построить график $f(x)$;
б) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;
в) вычислить $P(3 \le x < 5)$.

Решение

а. Значение c найдем из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{2} 0 \cdot dx + \int\limits_{2}^{6} c(x-2)dx + \int\limits_{6}^{+\infty} 0 \cdot dx = c\int\limits_{2}^{6} (x-2)dx = c\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^6 =$$

$$= c\left(\frac{36}{2} - 12 - \left(\frac{4}{2} - 4\right)\right) = 8c;$$

$$8c = 1;$$

$$c = \frac{1}{8}.$$

Построим график $f(x)$ (рис. 2.8).

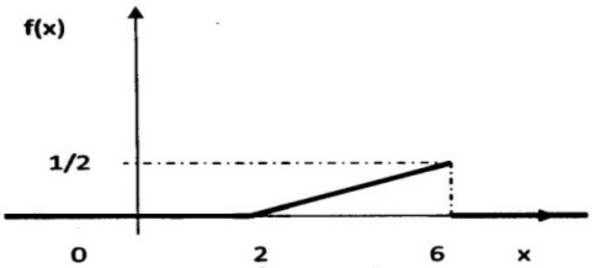

Рис. 2.8

б. Известно, что $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Поэтому, если $x\le 2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\cdot dx=0$;

если $2<x\le 6$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{2} 0\cdot dx+\int\limits_{2}^{x}\frac{1}{8}(x-2)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_2^x=$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}-2x-\left(\frac{4}{2}-4\right)\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}-2x+2\right)=\frac{1}{16}(x-2)^2.$$

если $x>6$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{2} 0\cdot dx+\int\limits_{2}^{6}\frac{1}{8}(x-2)dx+\int\limits_{6}^{x} 0\cdot dx=\frac{1}{8}\int\limits_{2}^{6}(x-2)dx=$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_2^6=\frac{1}{8}\left(\frac{36}{2}-12-\left(\frac{4}{2}-4\right)\right)=\frac{1}{8}\cdot 8=1.$$

Таким образом, $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 2,\\ \dfrac{(x-2)^2}{16} & \text{при} \quad 2<x\le 6,\\ 1 & \text{при} \quad x>6.\end{cases}$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 2.9.

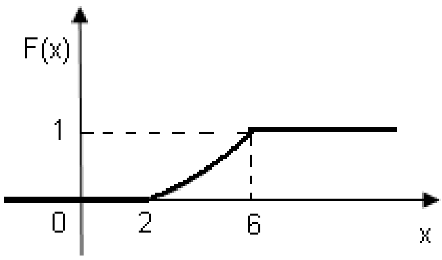

Рис. 2.9

в. $P(3\le X<5)=F(5)-F(3)=\dfrac{(5-2)^2}{16}-\dfrac{(3-2)^2}{16}=\dfrac{9}{16}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}.$

Пример 2. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{(3\operatorname{arctg} x)}{\pi} & \text{при} \quad 0<x\le\sqrt{3},\\ 1 & \text{при} \quad x>\sqrt{3}.\end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$.

Решение. Так как $f(x)=F'(x)$, то

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{3}{\pi(1+x^2)} & \text{при} \quad 0<x\le\sqrt{3},\\ 0 & \text{при} \quad x>\sqrt{3}.\end{cases}$$

2.3.2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Понятие математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$, введенные ранее дискретной случайной величины, можно распространить на непрерывные случайные величины.

Математическое ожидание $M(X)$ непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

при условии, что этот интеграл сходится абсолютно, а *дисперсия* $D(X)$ может быть вычислена по формуле

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины определяется равенством: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$. Все свойства математического ожидания и дисперсии, рассмотренные ранее для дискретных случайных величин, справедливы и для непрерывных.

Модой непрерывной случайной величины X называется такое ее значение $M_0(X)$, при котором плотность распределения $\varphi(x)$ имеет максимум, т. е. $\varphi(M_0(X))=\max$ (рис. 2.10).

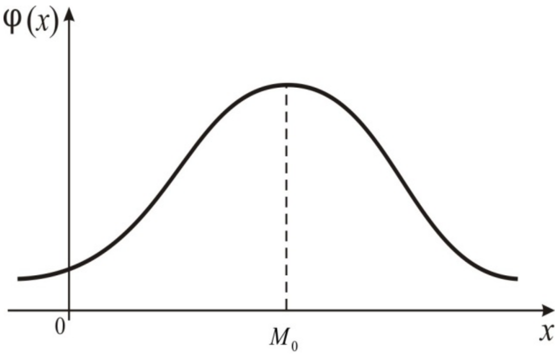

Рис. 2.10

Если распределение является симметричным и модальным (т. е. имеет моду) и существует математическое ожидание, то оно совпадает с модой и центром симметрии распределения.

Медианой $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина X меньше $M_e(X)$ или больше $M_e(X)$, т. е.

$$P(X < M_e) = P(X > M_e) = \frac{1}{2}.$$

Геометрически вертикальная прямая $x = M_e(X)$, проходящая через точку с абсциссой, равной $M_e(X)$, делит площадь фигуры под кривой распределения на две равные части (рис. 2.11). Каждая из этих площадей равна $\frac{1}{2}$, так как площадь, ограниченная кривой распределения, равна единице. Поэтому функция распределения в точке $x = M_e(X)$ равна $\frac{1}{2}$, т. е. $F(M_e(X)) = \frac{1}{2}$.

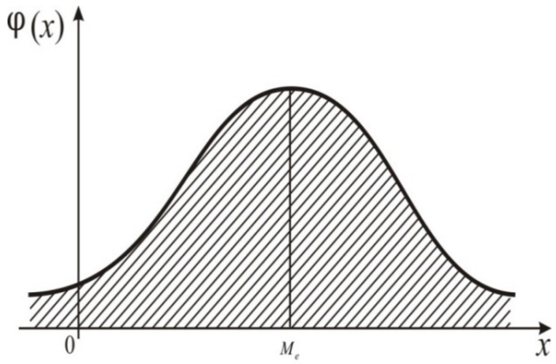

Рис. 2.11

В случае симметричного модального распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой.

Пример 1. Дана функция (рис. 2.12) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{2}\sin x & \text{при } 0 \le x \le \pi, \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$

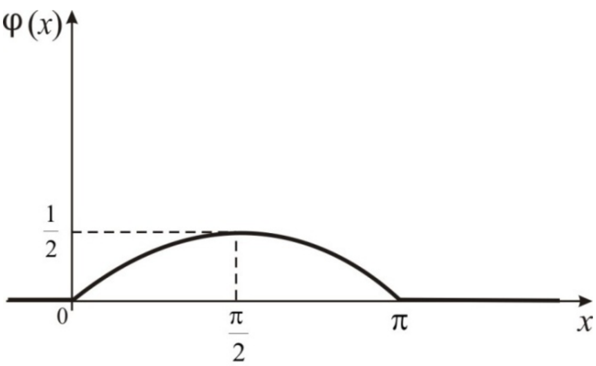

Рис. 2.12

Показать, что $\varphi(x)$ может служить плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины *X*. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*.

Решение. Используя свойство нормированности плотности распределения, найдем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0}0\cdot dx + \int_{0}^{\pi}\varphi(x)dx + \int_{\pi}^{+\infty}0\cdot dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin x dx = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi} = 1,$$

кроме того, $\varphi(x) \geq 0$. Следовательно, $\varphi(x)$ может служить плотностью вероятностей некоторой случайной величины. Так как прямая $x = \dfrac{\pi}{2}$ является осью симметрии соответствующей дуги кривой $y = \dfrac{1}{2}\sin x$ (см. рис. 2.12), то математическое ожидание случайной величины *X* равно $\dfrac{\pi}{2}$, т. е. $m_X = \dfrac{\pi}{2}$.

Найдем дисперсию двукратным интегрированием по частям:

$$D_X = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_X)^2\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\sin x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\cos x + 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin x + 2\cos x\right]\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 4\right] = \frac{\pi^2}{4} - 2; \quad \sigma_X = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2} \approx 0{,}69.$$

Пример 2. Дана плотность вероятностей случайной величины *X*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{2}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{при} \quad 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{при} \quad x > a. \end{cases}$$

Найти функцию распределения *F*(*X*), вероятность попадания случайной величины *X* в промежуток $\dfrac{a}{2} \leq x < a$, числовые характеристики: m_X, D_X, σ_X.

Решение. Найдем функцию распределения случайной величины *X*:

Если $x<0$, то $F(X)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x}0\cdot dt=0$.

Если $0\le x\le a$, то

$$F(X)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot dt+\frac{2}{a}\int\limits_{0}^{x}\left(1-\frac{t}{a}\right)dt=\frac{2}{a}\left(t-\frac{t^2}{2a}\right)\Bigg|_0^x=\frac{x}{a}\left(2-\frac{x}{a}\right).$$

Если $x>a$, то $F(X)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot dt+\frac{2}{a}\int\limits_{0}^{a}\left(1-\frac{t}{a}\right)dt+\int\limits_{a}^{+\infty}0\cdot dt=1.$

Итак, $F(X)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \frac{x}{a}\left(2-\frac{x}{a}\right) & \text{при} \quad 0\le x\le a,\\ 1 & \text{при} \quad x>a.\end{cases}$

По формуле $P\left(\frac{a}{2}\le x<a\right)=F(a)-F\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

Найдем математическое ожидание случайной величины X

$$m_X=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}x\cdot 0\cdot dx+\frac{2}{a}\int\limits_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)xdx+\int\limits_{a}^{+\infty}x\cdot 0\cdot dx=\frac{2}{a}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_0^a=\frac{a}{3}.$$

Теперь отыщем дисперсию

$$D_X=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)^2\varphi(x)dx=\frac{2}{a}\int\limits_{0}^{a}\left(x-\frac{a}{3}\right)^2\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{a}\left[\int\limits_{0}^{a}\left(x-\frac{a}{3}\right)^2dx-\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{a}x\cdot\left(x^2-\frac{2a}{3}x+\frac{a^2}{9}\right)dx\right]=$$

$$=\frac{2}{a}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{3}\right)^3-\frac{1}{a}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2a}{9}x^3+\frac{a^2}{18}x^2\right)\right]\Bigg|_0^a=\frac{a^2}{18}.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение $\sigma_X=\sqrt{D_X}=\frac{a}{3\sqrt{2}}$.

Пример 3. Найти моду, медиану, математическое ожидание и функцию распределения случайной величины X, заданного плотностью вероятностей $\varphi(x)=\begin{cases}8xe^{-4x^2} & \text{при} \quad x\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad x<0.\end{cases}$

Решение. Найдем точку максимума функции $\varphi(x)$:

$\varphi'(x)=8e^{-4x^2}+8xe^{-4x^2}(-8x)=8e^{-4x^2}(1-8x^2)$, отсюда $\varphi'(x)=0$ при

$x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Точка $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ является точкой максимума функции $\varphi(x)$, так как $\varphi'(x) > 0$, если $x < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ и $\varphi'(x) < 0$, если $x > \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Следовательно, мода $M_0(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}35$.

Медиану $M_e(X) = \mu$ определим из условия: $P(X < \mu) = 0{,}5$ (или $P(X > \mu) = 0{,}5$).

В данном случае по формуле $P(X < \mu) = \int\limits_0^{\mu} \varphi(x)dx$, т. е.

$$P(X < \mu) = \int\limits_0^{\mu} 8xe^{-4x^2}dx = -\int\limits_0^{\mu} e^{-4x^2} d(-4x^2) = -e^{-4x^2}\Big|_0^{\mu} = 1 - e^{-4\mu^2}.$$

Таким образом, приходим к уравнению: $1 - e^{-4\mu^2} = \dfrac{1}{2}$ или $e^{-4\mu^2} = \dfrac{1}{2}$.

Отсюда $\mu = M_e(X) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\ln 2} \approx 0{,}42$.

Вычислим математическое ожидание случайной величины *X*:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} x \cdot 8x^2 e^{-4x^2}dx = 8\lim_{B\to+\infty}\int\limits_0^B x \cdot x^2 e^{-4x^2}dx =$$

$$= \left[u = x^2,\ du = 2xdx;\ dv = x \cdot e^{-4x^2}dx,\ v = -\frac{1}{8}e^{-4x^2} \right] =$$

$$= 8\lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{8}x^2 \cdot e^{-4x^2}\Big|_0^B + \frac{2}{8}\int\limits_0^B x \cdot e^{-4x^2}dx \right) = \lim_{B\to+\infty}\left(-B^2 e^{4B^2} - \frac{2}{8}\int\limits_0^B e^{-4x^2} d(-4x^2) \right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty} e^{-4x^2}\Big|_0^B = -\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty}\left(e^{-4B^2} - 1\right) = -\frac{1}{4}(0-1) = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Найдем функцию распределения случайной величины *X*.

Прежде всего заметим, что если $x < 0$, то $F(X) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

Если же $x \ge 0$, то $F(X) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_0^x 8te^{-4t^2}dt = -e^{-4t^2}\Big|_0^x = 1 - e^{-4x^2}$,

т. е. $F(X) = 1 - e^{-4x^2}$, $x \ge 0$.

2.3.3. Законы распределения непрерывных случайных величин

Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерный закон распределения вероятностей* на отрезке $[a, b]$, если ее плотность $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a\le x\le b,\\ 0 & \text{при} \quad x<a,\ x>b.\end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ для равномерно распределенной случайной величины X, имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a<x\le b,\\ 1 & \text{при} \quad x>b.\end{cases}$$

График функции распределения $F(x)$ изображен на рис. 2.13.
График плотности распределения $f(x)$ изображен на рис. 2.14.

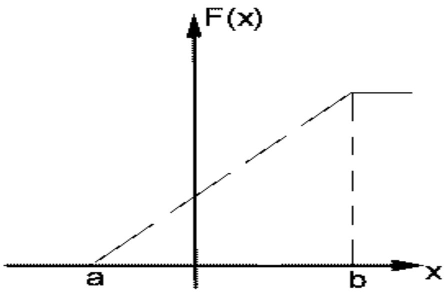

Рис. 2.13

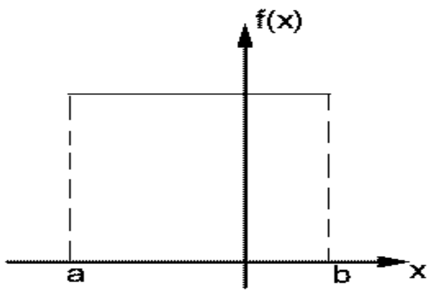

Рис. 2.14

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей равномерное распределение, находятся по формулам

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины X на интервал $(\alpha, \beta)\subset[a, b]$ вычисляется по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Пример 1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [3;7]. Найти:

а) плотность распределения вероятностей $f(x)$ и построить ее график;
б) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;
в) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Воспользовавшись формулами, рассмотренными ранее, при $a = 3$, $b = 7$, находим $f(x)$.

Построим график $f(x)$ (рис. 2.15):

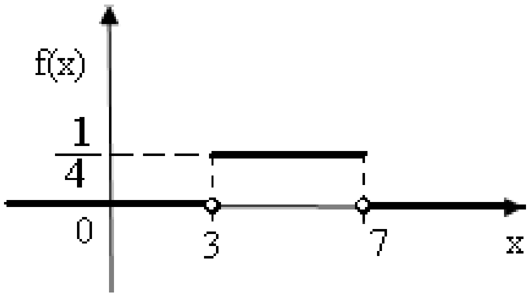

Рис. 2.15

$$\text{а)}\quad f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<3,\\ \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad 3\le x\le 7,\\ 0 & \text{при} \quad x>7.\end{cases}$$

Построим график $F(x)$ (рис. 2.16):

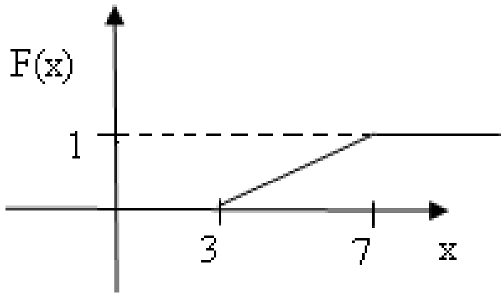

Рис. 2.16

$$\text{б)}\quad F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 3,\\ \dfrac{x-3}{4} & \text{при} \quad 3<x\le 7,\\ 1 & \text{при} \quad x>7;\end{cases}$$

в) найдем числовые характеристики

$$M(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{3+7}{2}=5,$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(7-3)^2}{12}=\frac{4}{3},$$

$$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 2. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты? Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – времени ожидания поезда.

Решение. Случайная величина X – время ожидания поезда – на временном отрезке [0, 2] имеет равномерный закон распределения $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x\in[0,\ 2],\\ 0, & \text{вне } [0,\ 2].\end{cases}$ Тогда вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты

$$P(X \le 0{,}5)=\int_0^{0,5}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{0,5}=\frac{1}{4}.$$

По формулам найдем

$$M(X)=\frac{0+2}{2}=1 \text{ мин},$$

$$D(X)=\frac{(2-0)^2}{12}=\frac{1}{3}.$$

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}58 \text{ мин}.$$

Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *показательный* (*экспоненциальный*) *закон распределения*, если ее плотность вероятностей $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad x<0,\end{cases}$$

где $\lambda>0$ – параметр данного распределения.

Ее функция распределения $F(x)$ находится по формуле

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad x<0.\end{cases}$$

Кривая распределения f (x) и график функции распределения $F(x)$ случайной величины X приведены на рис. 2.17 и рис. 2.18.

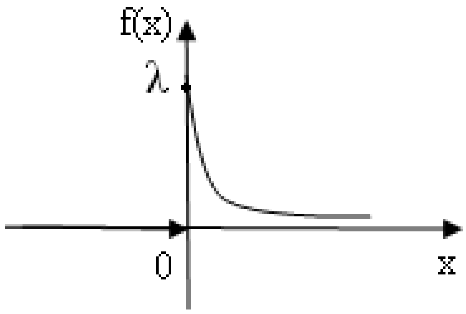

Рис. 2.17

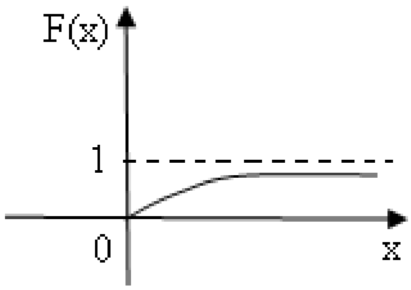

Рис. 2.18

Числовые характеристики показательного распределения определяются равенствами

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\; D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\; \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Для показательного закона распределения вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a,\ b)$, определяется формулой

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Экспоненциальное распределение является одним из основных распределений, используемых в теории надежности. Он используется при рассмотрении внезапных отказов деталей в тех случаях, когда явления изнашивания и усталости выражены настолько слабо, что ими можно пренебречь.

Пример 1. Среднее время безотказной работы прибора равно 100 ч. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти:

а) плотность распределения вероятностей;

б) функцию распределения;

в) вероятность того, что время безотказной работы прибора превысит 120 ч.

Решение. По условию математическое распределение $M(X)=\frac{1}{\lambda}=100$, откуда $\lambda=1/100=0{,}01$.

Следовательно,

а) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ 0{,}01e^{-0{,}01x} & \text{при} \quad x \geq 0; \end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ 1-e^{-0{,}01x} & \text{при} \quad x \geq 0; \end{cases}$

в) искомую вероятность найдем, используя функцию распределения:
$P(X>120)=1-F(120)=1-(1-e^{-1{,}2})=e^{-1{,}2}\approx 0{,}3$.

Пример 2. Случайная величина Т – время работы радиолампы – имеет показательное распределение. Определить вероятность того, что время работы лампы будет не меньше 600 ч, если среднее время работы радиолампы 400 ч.

Решение. По условию задачи математическое ожидание случайной величины T равно 400 ч, следовательно, $\lambda=\frac{1}{400}$.

Тогда искомая вероятность

$$P(T \geq 600) = 1 - P(T < 600) = 1 - F(600) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{400}\cdot 600}) = e^{-\frac{600}{400}} = e^{-1{,}5} \approx 0{,}2231.$$

Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения (закон Гаусса) играет исключительную роль в теории вероятностей. Главная особенность закона состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются, при определенных условиях, другие законы распределения. Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике.

Непрерывная случайная величина имеет *нормальный закон распределения (закон Гаусса*) с параметрами α и σ, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения нормально распределенной случайной величины равна

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Графически функция распределения и функция плотности нормального распределения представлены на рис. 2.19 и рис. 2.20.

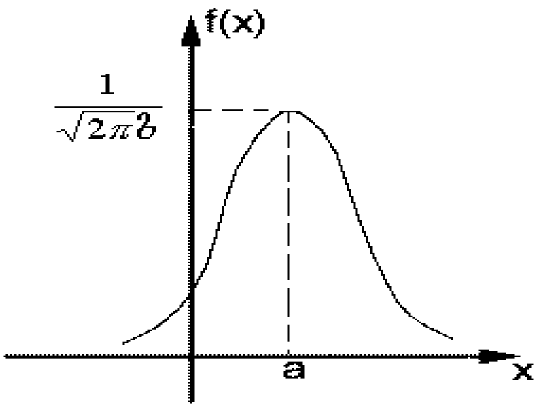

Рис. 2.19

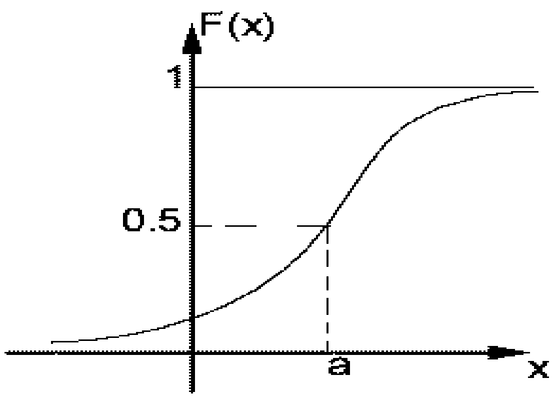

Рис. 2.20

Через $X\sim N(\alpha,\sigma)$ обозначается случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ^2.
Параметры нормального распределения являются математическое ожидание $M(X)=a$ и дисперсия $D(X)=\sigma^2$.

В частном случае, когда $a=0$ и $\sigma^2=1$, нормальное распределение называется *стандартным* и обозначается $X\sim N(0,1)$ В этом случае имеем нормированное(стандартное) распределение с функцией $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Эта функция Гаусса использовалась в локальной формуле Муавра-Лапласа. Для расчета вероятности пользуются таблицами функции Лапласа, знакомой нам по интегральной формуле Муавра-Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины $X \sim N(\alpha, \sigma)$ в интервал (x_1, x_2) можно вычислить по формуле

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

Формула упрощается, если границы допустимых значений случайной величины симметричны относительно $x = a$, т.е.

$$P(a - \varepsilon < X < \alpha + \varepsilon) = P(|X - \alpha| < \varepsilon) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

При $\Delta = 3\sigma$ имеем

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

Полученное равенство выражает так называемое *правило трех сигм*, согласно которому для нормально распределеной случайной величины X практически достоверно, что ее отклонение от центра $x = a$ окажется меньше утроенного стандартного отклонения σ.

Пример 1. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 32 и дисперсией 16.
Найти:
а) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
б) вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (28;38).

Решение. По условию m=32, σ^2=16, следовательно, σ=4, тогда

а) $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-32)^2}{32}}$;

б) воспользуемся формулой: $P(a < X < b) = \Phi\left(\dfrac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a - m}{\sigma}\right)$.

Подставив a=28, b=38, m=32, σ=4, получим

$$P(28 < X < 38) = \Phi\left(\frac{38 - 32}{4}\right) - \Phi\left(\frac{28 - 32}{4}\right) = \Phi(1,5) + \Phi(1).$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим Φ(1,5)=0,4332, Φ(1)=0,3413.
Таким образом, искомая вероятность: $P(28<X<38)$= 0,4332+0,3413=0,7745.

Пример 2. Случайные ошибки измерения детали подчинены нормальному закону с параметром $\sigma = 20$ мм. Найти вероятность того, что измерение детали произведено с ошибкой, не превосходящей по модулю 25 мм.

Решение. В нашем случае $\sigma = 20$, $\varepsilon = 25$, следовательно,

$$P(|X - \alpha| < 25) = 2\Phi_0\left(\frac{25}{20}\right) = 2\Phi_0(1,25) = 2 \cdot 0,3944 = 0,7888.$$

Пример 3. Пусть X – случайная величина, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием $\alpha = 1{,}6$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$. Найти вероятность того, что при четырех испытаниях эта случайная величина попадет хотя бы один раз в интервал (1,2).

Решение. Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал (1,2) при одном испытании.

$$P(1 < X < 2) = \Phi_0\left(\frac{2-1{,}6}{1}\right) - \Phi_0\left(\frac{1-1{,}6}{1}\right) = \Phi_0(0{,}4) + \Phi_0(0{,}6) =$$

$$= 0{,}1554 + 0{,}2257 = 0{,}3811.$$

Тогда вероятность того, что случайная величина не попадет в интервал (1, 2) при одном испытании равна 1 – 0,3811=0,6189, а при четырех испытаниях $0{,}6189^4 \approx 0{,}1467$. Значит, искомая вероятность $P = 1 - 0{,}1467 = 0{,}8533.$

2.3.4. Начальные и центральные моменты

В теории вероятностей и математической статистике, помимо математического ожидания и дисперсии, используются и другие числовые характеристики случайных величин. В первую очередь это начальные и центральные моменты.

Моментом порядка k случайной величины относительно точки c называется $M\left((X-c)^k\right)$.

При $c = 0$ имеем $m_k = M(X^k)$ – *начальные моменты.*

$$m_k = M(X^k) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k p_i - \text{для дискретной случайной величины,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx - \text{для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

При $c = M_x$, имеем $\mu_k = M\left((X-M_x)^k\right)$ – *центральные моменты*.

$$\mu_k = M\left((X-M_x)^k\right) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^k p_i - \text{для дискретной случайной величины,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^k f(x)dx - \text{для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Замечание. *Начальный момент* 1-го порядка равен математическому ожиданию: $m_1 = M(X)$. *Центральный момент* 2-го порядка равен дисперсии: $\mu_2 = M(X - M(X))^2 = D(X)$.

Между начальными и центральными моментами существует следующая связь:

$$\mu_k = M\left((X-M_x)^k\right) = M\left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i X^i (-M_x)^{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i M\left(X^i\right)(-m_1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i m_i (-m_1)^{k-i}.$$

Используя указанную связь, имеем

$$m_0 = 1,$$
$$m_1 = M_x,$$
$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = D_x,$$
$$\mu_3 = 2m_1^3 - 3m_2m_1 + m_3,$$
$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4.$$

Полученные соотношения необходимы для нахождения асимметрии и эксцесса.

Вычисление асимметрии и эксцесса позволяет установить симметричность распределения случайной величины относительно математического ожидания. Для этого находят третий центральный момент, характеризующий асимметрию закона распределения случайной величины. Если он равен нулю $\mu_3 = 0$, то случайная величина симметрично распределена относительно математического ожидания. Поскольку μ_3 имеет размерность случайной величины в кубе, то вводят безразмерную величину – *коэффициент асимметрии* $A_s = \dfrac{\mu_3}{\sigma_x^3}$.

При отклонении от нормального распределения, для которого $A_s = 0$, имеем, если асимметрия положительна $A_s \succ 0$, то *длинная* и более пологая часть кривой распределения расположена справа от точки на оси абсцисс, соответствующей моде; если эта часть кривой расположена слева от моды, то асимметрия отрицательна $A_s < 0$ (рис. 2.21).

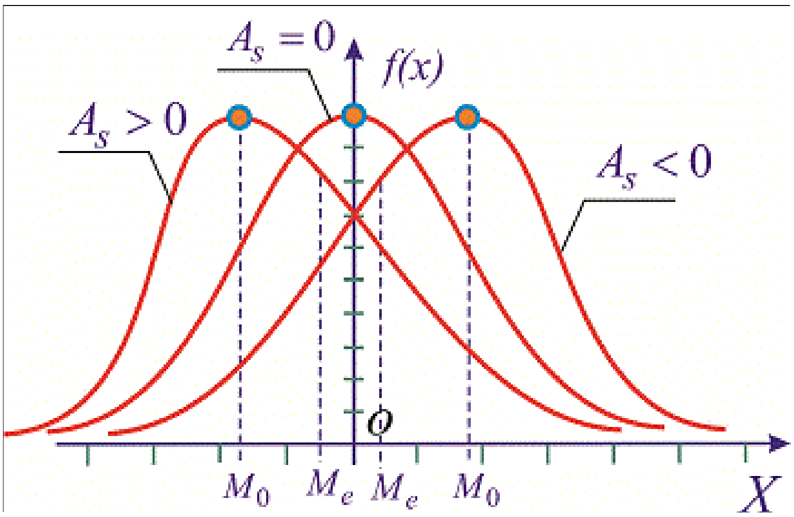

Рис. 2.21

Центральный момент четвертого порядка используется для определения эксцесса, который характеризует плосковершинность или островершинность функции плотности распределения вероятностей. *Эксцесс* вычисляется по формуле $E_s = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$. Число 3 вычитается для сравнения отклонения от нормального закона распределения, для которого $\frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = 3$. Эксцесс характеризует крутизну подъема кривой плотности распределения по сравнению с нормальной кривой, для которой $E_s = 0$. Если эксцесс положителен $E_s > 0$, то кривая имеет более высокую и острую вершину; в случае отрицательного эксцесса $E_s < 0$ сравниваемая кривая имеет более низкую и пологую вершину (рис. 2.22).

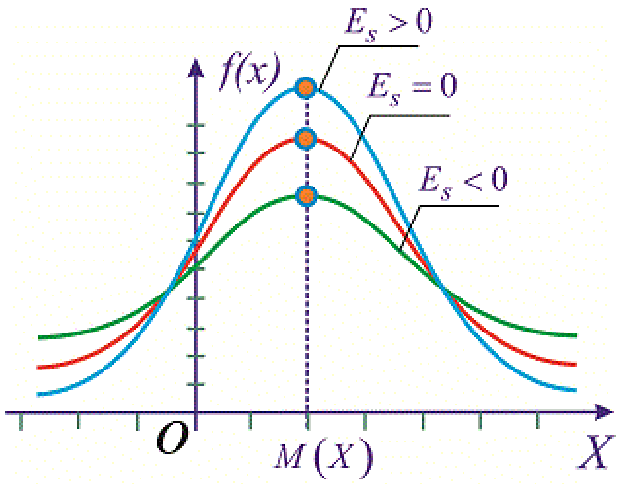

Рис. 2.22

При вычислении указанных характеристик используют *гамма-функцию*, которая определяется как интеграл вида

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in C : \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Напомним ее основные свойства:

1. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$;
2. $\Gamma(1) = 1$;
3. $\Gamma(n + 1) = n!$
4. Формула умножения Гаусса:

Рассмотрим формулу при $n = 2$:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right)...\Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2} - nz} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(nz).$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z),$$

откуда при $z = 0{,}5$ получим, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2.3.5. Закон больших чисел и предельные теоремы

Пусть случайная величина X имеет математическое ожидание $M(X) = a$ и дисперсию $D(X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство Чебышева:

$$P(|X - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Это неравенство часто используется в виде

$$P(|X - a| < \varepsilon) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева применимо для любых случайных величин. Если случайная величина $X = m$ имеет биномиальный закон распределения с математическим ожиданием $M(X) = a = np$ и дисперсией $D(X) = npq$, то

$$P(|m - np| < \varepsilon) > 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}.$$

Для частоты $\frac{m}{n}$ события в n независимых испытаниях имеем

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} M(m) = \frac{1}{n} np = p, \quad D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(m) = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n}$$

Неравенство Чебышева примет вид

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева используется для доказательства группы теорем, известных как закон больших чисел. Суть этого закона состоит в том, что при возрастании числа одинаково распределенных случайных величин их среднее арифметическое мало отличается от математического ожидания.

2.4. Контрольные вопросы

1. Дайте определение дискретной случайной величины.
2. Какими способами можно задать дискретную случайную величину?
3. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины. Назовите свойства математического ожидания.

4. Дайте определение дисперсии дискретной случайной величины. Формулы для вычисления дисперсии. Свойства дисперсии.
5. Дайте определение начальных и центральных моментов k-го порядка.
6. Что называется биномиальным законом распределения? Записать формулы для вычисления числовых характеристик дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону.
7. В каком случае применяется геометрический закон распределения?
8. Какое распределение называется распределением Пуассона?
9. В каком случае применяется закон распределения Пуассона и в чем состоит его особенность?
10. Какая формула используется для вычисления вероятности того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз при малом числе испытаний?
11. Какая формула используется для вычисления вероятности того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз при большом числе испытаний и малой вероятности p?
12. Сформулировать определение непрерывной случайной величины.
13. Что такое плотность распределения вероятностей?
14. Каким свойством обладает плотность распределения вероятностей?
15. Какими свойствами обладает функция распределения непрерывной случайной величины?
16. Как найти интегральную функцию, зная плотность распределения и наоборот?
17. Перечислите свойства интегральной функции распределения.
18. Дайте определения числовым характеристикам непрерывной случайной величины.
19. Верно ли, что математическое ожидание, медиана и мода нормально распределенной случайной величины X совпадают?
20. Верно ли, что кривая Гаусса симметрична относительно своего математического ожидания?
21. Верно ли, что кривая Гаусса имеет максимум в точке равной значению $M[X]$?
22. Верно ли, что кривая Гаусса тем круче, чем больше сигма?
23. Почему распределение Гаусса называется нормальным?
24. Что такое функция Лапласа, для чего она используется и какими свойствами обладает?

25. Назовите свойства случайной величины, имеющей нормальный закон распределения. Правило трех сигм.

2.5. Расчетные задания

2.5.1. Задание 10

Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

1. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & 1<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

2. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

3. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le \dfrac{\pi}{6},\\ 3\sin 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

4. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

5. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0.\end{cases}$$

6. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{3}{4}\left(x^2+2x\right), & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

7. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{1}{\pi},\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}, & -\dfrac{1}{\pi}<x\le\dfrac{1}{\pi},\\ 0, & x>\dfrac{1}{\pi}.\end{cases}$$

8. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

9. $$f(x)=\begin{cases}3e^{3x}, & x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

10. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

11. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}e^{x}, & x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x\le\frac{\pi}{2}.\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \frac{9}{2}x-\frac{3x^2}{4}-6, & 2<x\le 4.\\ 0, & x>4.\end{cases}$

16. $f(x)=\frac{1}{x^2+\pi^2}, \quad -\infty<x<+\infty.$

17. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{2x}{(1+x^2)^2}, & x>0.\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{2},\\ -\sin x, & -\frac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ e^{-x}, & x>0.\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{3x^2}{8}, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

21. $f(x)=\frac{2}{\pi\left(e^{x}+e^{-x}\right)}, \quad -\infty<x<+\infty.$

22. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 4\cos 4x, & 0<x\le\frac{\pi}{8},\\ 0, & x>\frac{\pi}{8}.\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \frac{x-1}{2}, & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le\pi,\\ -\cos x, & \pi<x\le\frac{3\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{3}{32}\left(4x-x^2\right), & 0<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2e^{-2x}, & x>0.\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{3}{2}\sin 3x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{3},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}, & -2<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ x-\dfrac{1}{2}, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2\cos 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

2.5.2. Задание 11

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Вычислить вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал. Найти плотность распределения случайной величины X. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

1. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x, & 0<x\le \pi,,\\ 1, & x>\pi\end{cases}$ $\qquad \left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right).$

2. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$ $\qquad \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right).$

3. $F(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases},$ $\qquad (-1;1).$

4. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sin x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right).$

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ -\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{9x^2}{4}-6x+5, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$ (3; 5).

6. $F(x)=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\pi}+\dfrac{1}{2},\quad -\infty<x<+\infty$ $\left(\pi;\pi\sqrt{3}\right).$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{1+x^2}, & x>0\end{cases},$ (1; 3).

8. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ $\left(-\dfrac{\pi}{3};0\right).$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-x}, & x>0\end{cases},$ (1; 2).

10. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^3}{8}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$ (–1; 1).

11. $F(x)=\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}e^{x},\quad -\infty<x<+\infty,$ (1; 3).

12. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sin 4x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{8},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{8}\end{cases}$ $\left(\dfrac{\pi}{16};\dfrac{\pi}{12}\right).$

13. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3 \end{cases}$ (0; 2).

14. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \pi \\ -\sin x, & \pi<x\le \dfrac{3\pi}{2}, \\ 1, & x>\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$ $\left(\dfrac{7\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{4}\right)$.

15. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{6x^2-x^3}{32}, & 0<x\le 4, \\ 1, & x>4 \end{cases}$ (2; 5).

16. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 1-e^{-2x}, & x>0 \end{cases}$, (1; 2).

17. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 3x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{3}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ $\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

18. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2 \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}, & -2<x\le 2, \\ 1, & x>2 \end{cases}$ $\left(-1;\ \sqrt{2}\right)$.

19. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \dfrac{1}{2}\left(x^2-x\right), & 1<x\le 2, \\ 1, & x>2 \end{cases}$ $\left(\dfrac{3}{2};\ 3\right)$.

20. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ $\left(\dfrac{\pi}{12};\ \dfrac{\pi}{6}\right)$.

21. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \sqrt{x}-1, & 1<x\le 4,\\ 1, & x>4\end{cases}$ $\left(\frac{16}{9};\frac{9}{4}\right)$.

22. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{\pi}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)+\frac{1}{2}, & -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

23. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le\frac{\pi}{6}\\ -\cos 3x, & \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3},\\ 1, & x>\frac{\pi}{3}\end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

24. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2}{4}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$ $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

25. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\end{cases},$ $\left(\sqrt{2};\,2\right)$.

26. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^3}{4}+\frac{3x^2}{4}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$ $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

27. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{1}{\pi}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin \pi x, & -\frac{1}{\pi}<x\le\frac{1}{\pi},\\ 1, & x>\frac{1}{\pi}\end{cases}$ $\left(0;\frac{1}{2\pi}\right)$.

28. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-\cos x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$.

29. $F(x)=\begin{cases}e^{3x}, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$, $\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$.

30. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin x+\dfrac{1}{2}, & -1<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$ $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

2.5.3. Задание 12

Известен закон распределения случайной величины *X*, где *mn* – номер варианта (например, 25-й вариант, следовательно, *m*=2, *n*=5).

x_i	m	n	m, n
p_i	0,2	p_2	0,3

Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z=(m+1)X+(n-1)Y$, если известно, что $M(Y)=m-1$, $D(Y)=n+1$, случайные величины *X* и *Y* независимы.

2.5.4. Задание 13

1. Дана функция $\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ a(4x-x^2) & \text{при} \quad 0\le x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$

При каком значении a функция $\varphi(x)$ может быть принята за плотность вероятности случайной величины *X*? Определив значение a, найдите $M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

2. Случайная величина X задана функцией плотности вероятностей $\varphi(x)$

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ ax & \text{при} \quad 0<x\le 1,\\ 0 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X .

3. Функция плотности распределения непрерывной случайной величины X задана следующим образом:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x<0,\\ a\sin x & 0\le x\le \pi,\\ 0 & x>\pi.\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X .

4. Дана функция плотности распределения случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{a} & \text{при} \quad 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X .

5. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases}axe^{-4x^2} & \text{при} \quad x\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad x<0.\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X .

6. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<2,\\ a(x-2)(4-x) & \text{при} \quad 2\le x\le 4,\\ 0 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X .

7. Случайная величина X задана функцией плотности распределения:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 2,\\ ax^2 & \text{при} \quad 2<x\le 3,\\ 0 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X .

8. Случайная величина X задана плотностью вероятностей $\varphi(x) = -\frac{3x^2}{4} + 6x - a$ на интервале $(3; 5)$, вне этого интервала $\varphi(x) = 0$.

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

9. Дана плотность вероятностей случайной величины X

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) & \text{при} \quad 0 \le x \le a, \\ 0 & \text{при} \quad x > a. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

10. Найдите $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X случайной величины с плотностью вероятностей $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ ae^{-4x} & x > 0. \end{cases}$

11. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x & 0 \le x \le \pi, \\ 1 & x > \pi. \end{cases}$$

Найдите: $M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

12. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{x^2}{a} & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

13. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ \frac{1}{19}(x^3 - a) & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

14. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} ae^{x} & x\le 0,\\ 0 & x>0.\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X.

15. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0,\\ ae^{-8x} & x>0.\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X.

16. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} ax^{5} & x\in(0,3],\\ 0 & x\notin(0,3].\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X.

17. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} ax^{3} & x\in(0,5],\\ 0 & x\notin(0,5].\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X.

18. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a(x-2)^{2} & x\in(2,3],\\ 0 & x\notin(2,3].\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X.

19. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & x\le 5,\\ ae^{-2(x-5)} & x>5.\end{cases}$$

Найдите: $a, M(X),\ D(X)$ и σ_X.

20. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} x-a & x\in(1,2],\\ 0 & x\notin(1,2],\end{cases}$$

Найдите:$a, M(X),\ D(X)$ и σ_X.

21. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a\cos 2x & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right], \\ 0 & x\notin\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

22. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a\sin 2x & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right], \\ 0 & x\notin\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

23. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a\,\mathrm{arctg}\,x & x\in(0,1], \\ 0 & x\notin(0,1]. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

24. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a\cos x & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0 & x\notin\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

25. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a\ln x & x\in(1,e], \\ 0 & x\notin(1,e]. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

26. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a(x^2+2\mathrm{x}) & x\in(0,1], \\ 0 & x\notin(0,1]. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

27. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a(4x-x^3) & x\in(0,2], \\ 0 & x\notin(0,2]. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

28. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a\sin 3x & x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right], \\ 0 & x\notin\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

29. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a\cos^2 x & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & x\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

30. Дана плотность вероятностей случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a\sin^2 x & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & x\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найдите: $a, M(X)$, $D(X)$ и σ_X.

2.5.5. Задание 14

1. Вероятность появления птенца из яйца равна 0,85. В гнезде отложено 3 яйца. Написать закон распределения случайной величины – числа птенцов в гнезде. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

2. Вероятность рождения голубоглазого ребенка, если у одного из родителей голубые глаза, равна 0,45. Написать закон распределения случайной величины – числа голубоглазых детей в такой семье при рождении двоих детей. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

3. Игральный кубик бросают 2 раза. Написать закон распределения случайной величины – числа выпадений грани с пятью очками. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

4. Тест состоит из трех вопросов, на каждый из которых предполагается 3 ответа, один из которых правильный. Неподготовленный студент наудачу выбирает ответ. Написать закон распределения случайной величины – числа ошибочных ответов. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

5. Правильная монета подбрасывается 3 раза. Написать закон распределения случайной величины – числа выпадений "герба" Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

6. В коробке 6 карандашей разного цвета. Ребенок случайным образом берет карандаш, рисует и возвращает его обратно. Написать закон распределения случайной величины – числа вынутых карандашей одного цвета при 2–х попытках. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

7. Вероятность перегорания лампочки в течение гарантийного срока равна 0,15. В люстре 3 лампочки. Написать закон распределения случайной величины – числа работающих лампочек в течение этого срока. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

8. Игральный кубик бросают 3 раза. Написать закон распределения случайной величины – числа выпадений нечетного числа очков. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

9. Вероятность рождения кареглазого ребенка, если у одного из родителей карие глаза, равна 0,55. Написать закон распределения случайной величины – числа кареглазых детей в такой семье при рождении троих детей. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

10. В партии товара, поступившего в магазин, 10% брака. Написать закон распределения случайной величины – числа бракованных изделий из трех купленных. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

11. Всхожесть семян арбуза при определенных условиях равна 60%. Написать закон распределения случайной величины – числа взошедших семян при четырех посаженных. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

12. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Написать закон распределения случайной величины – числа попаданий в цель при трех выстрелах. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

13. При компьютерном опросе студент должен ответить "да" или "нет" на 5 вопросов. Написать закон распределения случайной величины – числа верно угаданных ответов неподготовленного студента. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

14. Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Написать закон распределения случайной величины – числа мальчиков в семье, имеющей трех детей. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

15. В результате наблюдений установлено, что вероятность дождя 1 сентября в Нижнем Новгороде равна 0,25.Написать закон распределения случайной величины – числа дождливых Дней знаний в течение лет. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

16. Вероятность рождения девочки равна 0,48. Написать закон распределения случайной величины – числа девочек в семье, имеющей двоих детей. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

17. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Написать закон распределения случайной величины – числа попаданий в цель при трех выстрелах. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

18. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Написать закон распределения случайной величины – числа выигрышных билетов из двух приобретенных. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

19. Вероятность выбить "страйк" при игре в боулинг равна 0,15. Написать закон распределения случайной величины – числа таких попаданий в цель при трех бросаниях мяча. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

20. Вероятность выигрыша в компьютерной игре равна 0,4. Мальчик играл 4 раза. Написать закон распределения случайной величины – числа игр, закончившихся поражением. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

21. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Написать закон распределения случайной величины – числа попаданий в цель при трех выстрелах. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

22. Вероятность забивания мяча в ворота футболистом равна 0,6. Написать закон распределения случайной величины – числа попаданий мяча в цель при двух ударах футболиста. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

23. Вероятность выхода из строя кондиционера за лето равна 0,1. Написать закон распределения случайной величины – числа работающих в течение лета 4 кондиционеров. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

24. Вероятность превышения содержания хлора в каждой пробе воды равна 0,2. Взято 4 пробы. Написать закон распределения случайной величины – числа проб с повышенным содержанием хлора. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

25. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимают один шар, фиксируют его цвет и возвращают обратно. Опыт повторяют 3 раза. Написать закон распределения случайной величины – числа вынимаемых белых шаров. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

26. В организации 35% сотрудников застрахованы. Случайным образом отбирают двух человек. Написать закон распределения случайной величины – числа сотрудников со страховкой, среди отобранных. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

27. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимают один шар, фиксируют его цвет и возвращают обратно. Опыт повторяют 4 раза. Написать закон распределения случайной величины – числа вынимаемых черных шаров. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

28. Тест состоит из трех вопросов, на каждый из которых предполагается 1 правильный ответ. Неподготовленный студент наудачу выбирает ответ. Написать закон распределения случайной величины – числа верных ответов в тесте студента. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

29. В урне поровну белых и черных шаров. Из урны вынимают один шар, фиксируют его цвет и возвращают обратно. Опыт повторяют 2 раза. Написать закон распределения случайной величины – числа вынимаемых черных шаров. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

30. Игральный кубик подбрасывается 2 раза. Написать закон распределения случайной величины – числа выпадений четного числа очков. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

2.5.6. Задание 15

1. Построить ряд распределения и функцию распределения случайного числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске $p = 0{,}3$.

2. Стрелок производит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X – число попаданий (воспользоваться формулой Бернулли).

3. В урне имеются четыре шара с номерами от 1 до 4. Вынули два шара. Случайная величина X – сумма номеров шаров. Построить ряд распределения и функцию распределения величины X.

4. Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из них правильный. Составить закон распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число правильных ответов при простом угадывании.

5. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Составить закон распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число правильно решенных задач в билете.

6. В партии, содержащей 20 изделий, имеется четыре изделия с дефектами. Наудачу отобрали три изделия для проверки их качества. Составить закон (ряд) распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число дефектных изделий, содержащихся в указанной выборке.

7. Найти закон распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,5, 0,6, 0,7.

8. При производстве некоторого изделия вероятность брака составляет 0,2. В этом случае предприятие терпит убыток от производства этого изделия в 10 тыс. руб. При изготовлении стандартного изделия прибыль предприятия равна 20 тыс. руб. За день изготовлено 2 изделия. Составить закон распределения и построить функцию распределения случайной величины X – дневной прибыли предприятия.

9. Вероятность того, что наудачу взятая электрическая лампочка отработает предусмотренный стандартом срок, равна 0,95. Составить закон распределения и построить функцию распределения случайной величины – числа лампочек среди трех купленных, которые отрабатывают гарантийный срок.

10. Производятся последовательные испытания 5 приборов на надежность. Испытания заканчиваются, если прибор оказался ненадежным. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X – число испытаний, если вероятность выдержать испытания для прибора равна 0,9.

11. Имеется 6 заготовок для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали равна 0,9. Построить ряд распределения числа и функцию распределения случайной величины X – число заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали.

12. Сделано два вклада: 10 тыс. руб. в компанию A и 15 тыс. руб. в компанию B. Компания A обещает 50% годовых, но может «лопнуть» с вероятностью 0,2. Компания B обещает 40% годовых, но может «лопнуть» с вероятностью 0,15. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X – общая сумма прибыли (убытка), полученная от двух компаний через год,

13. Из 10 лотерейных билетов выигрышными являются 3. Составить закон распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число выигрышных билетов среди купленных наудачу 4 билетов.

14. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число стандартных деталей среди отобранных.

15. Клиенты банка, не связанные друг с другом, возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных.

16. Из урны, в которой лежат 2 белых и 8 черных шаров, вынимают три шара. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины – числа вынутых белых шаров.

17. В магазин поступила обувь с двух фабрик в отношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленных первой фабрикой.

18. Вероятность того, что автомат при опускании монеты сработает правильно, равна 0,9. Составить закон распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число опусканий монет до первой правильной работы автомата, если имеется 5 монет.

19. Охотник, имеющий 3 патрона, стреляет в цель до попадания. Построить ряд распределения числа израсходованных патронов, если вероятность попадания в цель равна 0,75.

20. Три баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Построить ряд распределения случайного числа бросков, производимых каждым из баскетболистов, если вероятность попадания для первого равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего 0,5.

21. В партии из 7 изделий содержится 5% бракованных. Контролер проверяет последовательно по одному взятому наудачу изделию, возвращая его после проверки обратно. При обнаружении бракованного изделия проверка прекращается и бракуется вся партия. Составить закон распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число изделий, проверенных контролером.

22. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

23. Вероятность того, что кредит размером до 1 млн руб. не будет возвращен, равна 0,1; для кредита размером свыше 1 млн руб. аналогичная вероятность равна 0,05. Банк выдал два кредита: в размере 500 тыс. руб. и 3 млн руб. Составить закон распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число невозвращенных кредитов из этих двух выданных.

24. Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью 0,5. Построить ряд распределения случайной величины X – число появлений герба.

25. Производится три выстрела по самолету. Вероятность попадания 0,7. Построить ряд распределения случайной величины X – число попаданий в самолет.

26. Из 30 экзаменационных вопросов студент подготовил 20. Составить закон распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число подготовленных вопросов среди трех вопросов экзаменационного билета.

27. Прибор комплектуется из двух деталей, вероятность брака для первой – 0,1, для второй – 0,05. Выбрано 4 прибора. Прибор считается бракованным, если в нем есть хотя бы одна бракованная деталь. Построить закон распределения и функцию распределения случайной величины X – число бракованных приборов среди выбранных четырех приборов.

28. В первой партии 10 деталей стандартных и 4 бракованных, во второй – соответственно 7 и 4. Из второй партии наугад перекладывают 3 детали в первую. Составить ряд распределения и построить функцию распределения для случайной величины – число бракованных деталей в первой партии после перекладывания.

29. К контролеру с конвейера поступили 4 детали. Вероятность брака для каждой детали равна 0,1. Детали проверяют одну за другой, пока не наберут две доброкачественные. Найти ряд распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число проверенных деталей.

30. Котировки акций могут быть размещены в Интернете на трех сайтах. Материал есть на первом сайте с вероятностью 0,7, на втором с вероятностью 0,6, на третьем с вероятностью 0,8. Студент переходит к новому сайту только в том случае, если не найдет данных на предыдущем. Найти закон распределения и построить функцию распределения случайной величины X – число сайтов, которые посетит студент.

2.5.7. Задание 16

1. На автоматическую телефонную станцию поступают вызовы со средней плотностью 5 вызовов в час. Считая, что число вызовов на любом участке времени распределено по закону Пуассона, найти вероятность того, что за две минуты на станцию поступит: а)ровно три вызова; б)хотя бы один вызов; в) не менее трех вызовов.

2. На ткацком станке нить обрывается в среднем 0,375 раза в течение часа работы станка. Найти вероятность того, что за смену (8 часов) число обрывов нити будет заключено в границах 2 и 4 (не менее 2 и не более 4 обрывов).

3. Число осколков, попадающих в малоразмерную цель при заданном положении точки разрыва, распределяется по закону Пуассона. Средняя плотность осколочного поля, в котором оказывается цель при данном положении точки разрыва, равна 3 оск./кв.м. Площадь цели равна S=0,5 кв.м. Для поражения цели достаточно попадания в нее хотя бы одного осколка. Найти вероятность поражения цели при данном положении точки разрыва.

4. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 100. Берется на пробу 2 куб. дм воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружен хотя бы один микроб.

5. По некоторой цели производится 50 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,04. Найти вероятность того, что в цель попадет: один снаряд, два снаряда, не попадает ни одного снаряда.

6. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

7. При испытании легированной стали на содержание углерода вероятность того, что в случайно взятой пробе процент углерода превысит допустимый уровень, равна p=0,01. Считая применимым закон редких явлений, вычислить, сколько в среднем необходимо испытать образцов, чтобы с вероятностью p=0,95 указанный эффект наблюдался по крайней мере 1 раз.

8. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету p=0,01. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью не меньшей, чем 0,98?

9. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно 120. Найти вероятность того, что за две секунды на АТС не поступит ни одного вызова; за две секунды на АТС поступит меньше двух вызовов.

10. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

11. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов с вероятностью отказа для каждого в течение времени t равной 0,0005. Найти вероятность того, что в течение времени t откажут: а) ровно 2 элемента; б) ни одного элемента; в) менее трех элементов; г) хотя бы один элемент.

12. По некоторой цели производится 50 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,04. Найти вероятность того, что в цель не попадет: один снаряд, два снаряда, ни одного снаряда.

13. Найти среднее число выехавших на перекресток транспортных средств за время T, если вероятность выезда хотя бы одного транспортного средства за это время равна 0,999 и вероятности выезда всех транспортных средств одинаковы.

14. Книга в 500 страниц имеет 100 опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице не менее четырех опечаток?

15. На автоматическую телефонную станцию поступают в среднем 300 вызовов в час. Найти вероятность того, что за две минуты на станцию поступит: а) ровно три вызова; б) хотя бы один вызов; в) не менее трех вызовов.

16. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит: а) четыре вызова; б) менее четырех вызовов; в) не менее четырех вызовов.

17. Среди семян ржи имеется 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 2500 семян обнаружить 5 семян сорняков?

18. Книга содержит 800 страниц. Вероятность опечатки на одной странице равна 0,0005. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице ровно 3 опечатки?

19. Завод отправил на базу 3000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,003. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено 2 изделия.

20. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на четырех веретенах.

21. На склад поступило 2000 наборов инструментов. Вероятность того, что набор укомплектован неправильно, равна 0,004. Найти вероятность того, что на склад поступит три набора, укомплектованных неправильно.

22. Блок электронного устройства содержит 100 одинаковых элементов. Вероятность отказа каждого элемента в течении времени T равна 0,002. Элементы работают независимо. Найти вероятность того, что за время T откажет не более двух элементов.

23. Учебник издан тиражом 50000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0002. Найти вероятность того, что тираж содержит: а) четыре бракованные книги; б) менее двух бракованных книг.

24. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 1000 отобранных деталей окажется: а) 5 бракованных; б) хотя бы одна бракованная.

25. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту она получит точно два вызова?

26. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,01. Какова вероятность того, что число попаданий при 200 выстрелах составит не менее 5 и не более 10?

27. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна p = 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

28. Сообщение содержит 1000 символов. Вероятность искажения одного символа равна 0,004. Найти среднее число искаженных символов; вероятность того, что будет искажено не более трех символов.

29. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двух и более пуль, если число выстрелов равно 5000.

30. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

31. Имеется общество из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придется на Новый год. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365.

2.5.8. Задание 17

1. Поезда метро идут равномерно с интервалом 3 мин. Какова вероятность, что подошедший пассажир будет ожидать ближайший поезд менее полминуты? Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания.

2. Случайная величина равномерно распределена на интервале (1;5). Найти её плотность и функцию распределения. Построить их графики.

3. Автобусы некоторого маршрута следуют строго по расписанию с интервалом 5 мин. Найти вероятность, что подошедший к остановке пассажир будет ожидать не менее 1 мин. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания.

4. Для случайной величины X, равномерно распределенной на интервале (2;6), найти $P(\,2 < X < 3)$, плотность и функцию распределения.

5. Интервал движения трамваев равен 4 мин. Какова вероятность, что подошедший к остановке пассажир будет ожидать вагон не более 2 мин? Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания.

6. Радиус окружности измерен приближенно на интервале $(a;b)$. Полагая, что радиус является случайной величиной X, равномерно распределенной на этом интервале, найти математическое ожидание и дисперсию длины окружности.

7. Паром для перевозки машин через реку подходит к причалу через каждые 40 мин. X – время прибытия машины к причалу. Найти вероятность, что подъехавшая случайным образом автомашина будет ожидать прибытия парома не более 10 мин. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания.

8. Для случайной величины X, равномерно распределенной на промежутке (–1;5), найти математическое ожидание и $P(0 < X < 3)$.

9. Кабинки фуникулёра подъезжают к подножию горы через каждые полчаса. Какова вероятность, что подошедшим лыжникам ждать придется менее 5 мин? Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания.

10. Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины X на интервале $(1; b)$ равно 2. Найти параметр b и $D(X)$.

11. Время ожидания троллейбуса на остановке имеет равномерное распределение на промежутке (0;10) мин. Какова вероятность, что ожидать ближайший троллейбус придется более 8 мин? Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания.

12. Станок – автомат выдает обработанную деталь через каждые 7 мин. Найти вероятность, что подошедший контролёр будет ожидать готовую деталь менее 30 секунд. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания.

13. X – равномерно распределенная случайная величина на интервале $(a;5)$. Дисперсия её равна 1/3 . Найти параметр a и математическое ожидание.

14. Паром для перевозки пассажиров и машин через залив приплывает к причалу через каждые 3 ч. Какова вероятность, что подъехавшая машина попадет на паром менее, чем через полчаса? Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания.

15. Ребро куба приближенно измерено в интервале $(a;b)$. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение площади поверхности куба, если его ребро рассматривать как случайную величину, равномерно распределённую на этом интервале.

16. Время ожидания автобуса на остановке имеет равномерное распределение в промежутке (0;20) мин. Найти вероятность ожидания автобуса более 15 мин. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания.

17. Вычислить математическое ожидание и дисперсию для площади равностороннего треугольника, сторона которого приближенно измерена в интервале $(a;b)$ и равномерно распределена на данном интервале.

18. Цена деления шкалы амперметра 0,1А. Показания округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность, что при измерении будет допущена ошибка, не превышающая 0,03А.

19. Вычислить среднее время ожидания троллейбуса и среднее квадратическое отклонение при условии строгого соблюдения графика движения с интервалом 6 мин.

20. Случайная величина X равномерно распределена на интервале (3;7). Найти $P(4<X<6)$, плотность и функцию распределения.

21. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,5. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность, что при измерении будет допущена ошибка, не превышающая 0,02.

22. Минутная стрелка электронных часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность, что в данный момент часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 10 с.

23. Диагональ квадрата приближенно измерена на промежутке $(a;b)$. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение площади квадрата, если считать диагональ случайной величиной, равномерно распределенной на данном промежутке.

24. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, равномерно распределенной на интервале (8;11).

25. Цена деления штангенциркуля равна 0,1 мм. Показания при измерении округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность, что при измерении детали будет допущена ошибка, превышающая 0,03 мм.

26. Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(1;b)$. Вероятность попадания в интервал (2;5) равна 0,3. Найти параметр b, математическое ожидание и дисперсию.

27. Экспресс курсирует между аэропортом и ж/д вокзалом с интервалом полтора часа. Найти вероятность, что пассажиры, не знающие его расписания, будут ждать ближайший рейс менее 20 мин.

28. Для случайной величины X, имеющей равномерное распределение на интервале (0,6), найти $P\ (1 < X < 4)$, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

29. Плотность распределения равномерной случайной величины X на промежутке $(a;11)$ равна 0,1. Найти параметр a, математическое ожидание и дисперсию.

30. Время бегуна на дистанции фиксировалось секундомером с ценой деления 0,1 с и оказалось выше мирового рекорда на 0,02 с. Какова вероятность, что спортсмен, по крайней мере, повторит рекорд?

2.5.9. Задание 18

1. Средний срок службы коробки передач до капитального ремонта у автомобиля определенной марки составляет 56 мес. со стандартным отклонением $\sigma = 16$ мес. Привлекая покупателей, производитель хочет дать гарантию на этот узел, обещая сделать ремонт коробки передач нового автомобиля в случае ее поломки до определенного срока. Пусть срок службы коробки передач подчиняется нормальному закону. На сколько месяцев в таком случае производитель должен дать гарантию для этой детали, чтобы число бесплатных ремонтов не превышало 2,275% проданных автомобилей?

2. X – нормальная случайная величина с математическим ожиданием $a = 4$. Вероятность попадания X в интервал (3,5; 4,5) равна 0,7. Найти вероятность того, что из трех значений случайной величины X две попадут в интервал (2,5; 3,5).

3. Случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{18\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{4.,5}}$. Найдите $M(X)$ – математическое ожидание X, $D(X)$ –дисперсию X, вероятность того, что абсолютная величина отклонения X от математического ожидания не превысит 3.

4. Задана случайная величина X=N(3,1; 0.5) и точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, разделяющие числовую ось на три интервала. Найти вероятность того, что случайная величина X принимает значения в этих интервалах

5. Плотность вероятностей распределения случайной величины имеет вид $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$. Найти вероятность того, что из 4 независимых случайных величин, распределенных по данному закону, две окажутся на интервале $(-\infty; 3)$.

6. Автоматически изготовленные детали по длине распределены нормально и расположены в интервале от 29,7 до 30,3 см. Какой длины проектировалась деталь, и с каким допуском?

7. Длина изготовляемой детали является нормально распределенной случайной величиной со средним значением a=100 мм и средним квадратическим отклонением σ=2 мм. Каких деталей окажется в большой партии больше – тех, у кого длина превосходит 103 мм или тех, у кого она заключается в пределах от 101 мм до 102 мм?

8. Коробки с деталями упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 900 г. Известно, что 1% коробок имеют массу, большую 1 кг. Каков % коробок, масса которых не превышает 850 г., если вес коробок – случайная величина, распределенная по нормальному закону?

9. Длина заготовок распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 1 мм и средним квадратическим отклонением 9 мм. Найти вероятность того, что в партии из 10 деталей не будет ни одной детали длиной более 105 см.

10. Диаметр болтов подчиняется нормальному распределению с параметрами $M(x)$=20, σ=0.1. Найти плотность распределения и количество болтов размером меньше 19,9, если всего болтов 12 шт.

11. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее фактического размера от проектного не превосходит по абсолютной величине 8 мм. Случайные отклонения фактического размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ=5 мм и математическим ожиданием a=0. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

12. Размер детали задан полем допуска 10 – 12 мм. Оказалось, что средний размер детали равен 11,4 мм, а среднее квадратическое отклонение – 0,7 мм. Считая, что размер детали подчиняется нормальному закону распределения, определить вероятность брака по заниженному и завышенному размеру.

13. Менеджер торгово-посреднической фирмы получает жалобы от некоторых клиентов на то, что служащие фирмы затрачивают слишком много времени на выполнение их заказов. Собрав и проанализировав соответствующую информацию, он выяснил, что среднее время выполнения заказа составляет 6,6 дней, однако для выполнения 20% заказов потребовалось 15 дней и более. Учитывая, что время выполнения заказа есть случайная величина, распределенная по нормальному закону, определите фактическое стандартное отклонение времени обслуживания клиентов.

14. Ошибка измерения некоторого параметра технической системы является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если номинальное значение измеряемого параметра равно a, а стандартное отклонение от него равно 2, то какую точность измерения параметра технической системы можно гарантировать с вероятностью 0,8?

15. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) a = 120 мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее 116,5 мм и не более 123,5 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали меньше 117,2 мм.

16. По данным Центрального банка России, случайная величина X – недельная потребность в купюрах достоинством 100 руб. подчиняется закону нормального распределения со средним значением a = 1160 и средним квадратичным отклонением σ = 240. Требуется записать функцию плотности вероятности и построить ее график.

17. Размер диаметров втулок, изготовленных цехом, можно считать нормально распределенной случайной величиной со средним 2,5 см и дисперсией 0,0001 см^2. Какое следует установить поле допуска относительно номинального диаметра, чтобы брак составлял 1%?

18. Параметр X детали распределён нормально с m = 2, равным номиналу. Каким должно быть σ, чтобы с вероятностью 0,9 отклонение X по модулю не превышало 1% номинала?

19. Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X имеет вид $f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-14)^2}{32}}$. В каком промежутке она с большей вероятностью принимает значения (6; 8) или (18; 20)?

20. В результате поверки амперметра установлено, что 70% погрешностей результатов измерений, произведенных с его помощью, не превосходит ± 20 %. Считая, что погрешности распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, определить среднеквадратическую погрешность.

21. Браковка шаров для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстия d_1=5,9 мм, но проходит через отверстие d_2=6,1 мм, то его размер считается приемлемым. Если какое–нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика есть нормально распределенная случайная величина X и $M(X)$=6 мм, $D(X)$=0.0025 мм^2. Какова вероятность, что шарик забракован?

22. Изделия, выпускаемые цехом, по своим линейным размерам распределяются по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 6 см. Известна вероятность, равная 0,9758, что наудачу взятое изделие будет иметь размеры в границах от 5,95 до 6,05 см. Найти дисперсию этой случайной величины.

23. Валик, изготовленный автоматом, считается стандартным, если отклонение его диаметра от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметров валиков подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением 1,6 мм и математическим ожиданием, равным 0. Сколько стандартных валиков (в процентах) изготавливает автомат?

24. Еженедельный выпуск продукции на заводе распределен по нормальному закону. Известно, что вероятность того, что еженедельный выпуск продукции превысит 150000 ед. равна 0,221, а вероятность того, что он окажется ниже 100000 ед. равна 0,0038. Определите, сколько в среднем единиц продукции в неделю выпускает завод.

25. Диаметр электродвигателя есть нормально распределенная случайная величина с параметрами a = 100 мм и σ = 1.6 мм. Найти вероятность того, что диаметр случайно взятого электродвигателя находится в интервале (98, 101).

26. Случайные ошибки измерения детали подчинены нормальному закону с параметром σ = 20 мм. Найти вероятность того, что измерение детали произведено с ошибкой, не превосходящей по модулю 25 мм.

27. Пусть X – случайная величина, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием a = 16 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$. Какова вероятность того, что при четырех испытаниях эта случайная величина попадет хотя бы один раз в интервал (1,2)?

28. Пусть диаметр изготовляемой в цехе детали является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 4{,}5$ см, $\sigma = 0{,}05$ см. Найти вероятность того, что размер диаметра взятой наудачу детали отличается от математического ожидания не более чем на 1 мм.

29. Цех изготовляет детали, длины которых представляют собой случайную величину *X*, распределенную по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение величины *X* соответственно равны 15 см и 0,1 см. Найти вероятность того, что отклонение длины детали в ту или другую сторону от математического ожидания не превзойдет 0,25 см.

30. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение *X* диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина *X* распределена нормально со средним квадратическим отклонением σ = 0,4 мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

2.5.10. Задание 19

1. Найти, при каких значениях *A* функция является функцией плотности распределения. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $b = 2, \lambda = 1$).
$\varphi(x) = Ax^{2b-3}e^{-\lambda x}$ $(\lambda \succ 0, b > 1)$.

2. Для геометрического распределения $P(m) = (1-p)^m p,\ m = 0,1,2...$ найти $M_x,\ D_x, A_s, E_x$ (указать их при $p = 0{,}5$).

3. Найти при каких значениях *A* функция является функцией плотности распределения. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $\sigma = 1$).
$\varphi(x) = Axe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

4. Найти, при каких значениях *A* функция является функцией плотности распределения случайной величины $x \in [0, +\infty[$. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $\lambda = 0{,}5$).
$\varphi(x) = A\sqrt{x}\, e^{-\lambda x}, \lambda > 0.$

5. Найти, при каких значениях *A* функция является функцией плотности распределения случайной величины $x \in R$. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $\lambda = 1$).
$\varphi(x) = A\ e^{-\lambda|x|}, \lambda > 0$

6. Найти, при каких значениях *A* функция является функцией плотности распределения случайной величины $x \in [0, +\infty[$. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $\lambda = 8$).

$$\varphi(x) = Ax^2e^{-\lambda x^2},\ \lambda > 0, \left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2{,}68014\right).$$

7. Найти, при каких значениях A функция является функцией плотности распределения случайной величины $x \in [0,+\infty[$. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $\lambda = 1$).
$\varphi(x) = A\ e^{-\lambda x}, \lambda > 0.$

8. Для распределения Пуассона $P(m) = \dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $m = 0,1,2,...$ Найти M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $\lambda = 2$).

9. Найти, при каких значениях A функция является функцией плотности распределения случайной величины $x \in [1;3]$. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x
$\varphi(x) = c.$

10. Найти, при каких значениях A функция является функцией плотности распределения случайной величины $x \in [0,+\infty[$. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $\lambda = 1$).
$\varphi(x) = Ax^3 e^{-\lambda x^2}, \lambda > 0.$

11. Найти, при каких значениях A функция является функцией плотности распределения случайной величины $x \in [0,+\infty[$. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $n = 4$).
$\varphi(x) = Ax^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}.$

12. Найти, при каких значениях A функция является функцией плотности распределения случайной величины $x \in [0,+\infty[$. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $\lambda = 4$).
$\varphi(x) = Ax^{-\frac{1}{3}} e^{-\lambda \sqrt[3]{x^2}}, \lambda > 0.$

13. Найти, при каких значениях A функция является функцией плотности распределения случайной величины $x \in [0,+\infty[$. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $\lambda = 2$, $\alpha = 0{,}5$).
$\varphi(x) = Ax^{\alpha-1} e^{-\lambda x^2}, \lambda > 0, \alpha > 0.$

14. Найти, при каких значениях A функция является функцией плотности распределения случайной величины $x \in [0,+\infty[$. Найти M_0, M_x, D_x, A_s, E_x (указать их при $\sigma = 2$).
$\varphi(x) = Ax^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$

15. Для биномиального закона распределения $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, m = 0,1,2,\dots,n$ Найти M_x, D_x, A_s, E_x (Указать их при $p = \frac{1}{2}$, $n = 100$).

2.5.11. Задание 20

Варианты 1 – 10

Оценить вероятность того, что частота некоторого события A отклонится от его вероятности p в каждом испытании из серии n независимых испытаний по абсолютной величине не более чем на 0,01.

1. $p = \frac{1}{3}$; $n = 7500$.

2. $p = \frac{1}{3}$; $n = 9000$.

3. $p = \frac{1}{3}$; $n = 9500$.

4. $p = \frac{1}{3}$; $n = 10000$.

5. $p = \frac{1}{3}$; $n = 6000$.

6. $p = \frac{1}{4}$; $n = 8000$.

7. $p = \frac{1}{4}$; $n = 2000$.

8. $p = \frac{1}{4}$; $n = 1500$.

9. $p = \frac{1}{6}$; $n = 1500$.

10. $p = \frac{1}{5}$; $n = 2500$.

Варианты 11 – 20

Вероятность некоторого события A в каждом испытании из серии n независимых испытаний равна p. Найти наименьшее число испытаний так, чтобы с вероятностью не меньшей 0,99 частота события A отклонялась по абсолютной величине от его вероятности p не более, чем на ε.

11. $p = \frac{1}{3}$; $\varepsilon = 0{,}01$.

12. $p = \frac{1}{4}$; $\varepsilon = 0{,}02$.

13. $p = \frac{1}{5}$; $\varepsilon = 0{,}03$.

14. $p = \frac{1}{6}$; $\varepsilon = 0{,}04$.

15. $p = \frac{2}{3}$; $\varepsilon = 0{,}01$.

16. $p = \frac{2}{5}$; $\varepsilon = 0{,}02$.

17. $p = \frac{1}{2}$; $\varepsilon = 0{,}03$.

18. $p = \frac{4}{7}$; $\varepsilon = 0{,}04$.

19. $p = \frac{3}{8}$; $\varepsilon = 0{,}01$.

20. $p = \frac{4}{9}$; $\varepsilon = 0{,}02$.

Варианты 21 – 30

Вероятность некоторого события A в каждом испытании из серии n независимых испытаний равна p. Найти границу абсолютной величины отклонения частоты события A от его вероятности p, которую можно ожидать с вероятностью 0,99, произведя n испытаний.

21. $p=\frac{1}{3};\ n=12100.$

22. $p=\frac{1}{3};\ n=13200.$

23. $p=\frac{1}{3};\ n=14300.$

24. $p=\frac{1}{3};\ n=15100.$

25. $p=\frac{1}{3};\ n=16200.$

26. $p=\frac{1}{3};\ n=17200.$

27. $p=\frac{1}{3};\ n=18100.$

28. $p=\frac{1}{3};\ n=19200.$

29. $p=\frac{1}{3};\ n=20100.$

30. $p=\frac{1}{3};\ n=21200.$

2.5.12. Задание 21

Варианты 1 ÷ 15

За значение некоторой случайной величины принимают среднее арифметическое достаточно большого числа её измерений. Предполагая, что среднее квадратическое отклонение σ возможных результатов каждого измерения не превосходит α см, оценить вероятность того, что при n измерениях неизвестной, величина отклонений принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет ε см.

1. $\alpha = 1$, $n = 2000$, $\varepsilon = 0{,}001$.

2. $\alpha = 1{,}2$, $n = 2500$, $\varepsilon = 0{,}01$.

3. $\alpha = 1{,}4$, $n = 3000$, $\varepsilon = 0{,}001$.

4. $\alpha = 1{,}6$, $n = 3500$, $\varepsilon = 0{,}01$.

5. $\alpha = 1{,}8$, $n = 4000$, $\varepsilon = 0{,}001$.

6. $\alpha = 1$, $n = 4500$, $\varepsilon = 0{,}01$.

7. $\alpha = 1{,}1$, $n = 5000$, $\varepsilon = 0{,}001$.

8. $\alpha = 1{,}3$, $n = 5500$, $\varepsilon = 0{,}01$.

9. $\alpha = 1{,}5$, $n = 6000$, $\varepsilon = 0{,}001$.

10. $\alpha = 1{,}7$, $n = 6500$, $\varepsilon = 0{,}01$.

11. $\alpha = 1{,}9$, $n = 7000$, $\varepsilon = 0{,}001$.

12. $\alpha = 1{,}2$, $n = 7500$, $\varepsilon = 0{,}01$.

13. $\alpha = 1{,}4$, $n = 8000$, $\varepsilon = 0{,}001$.

14. $\alpha = 1{,}5$, $n = 8500$, $\varepsilon = 0{,}01$.

15. $\alpha = 1{,}6$, $n = 9000$, $\varepsilon = 0{,}001$.

Варианты 16 ÷ 30

Дана последовательность независимых случайных величин X_1, X_2, X_n, для каждой из которых задан закон распределения. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

16.

X_n	$-4n$	0	$4n$
P_i^n	$\frac{1}{3^n}$	$1-\frac{1}{3^{n-1}}$	$\frac{1}{3^n}$

17.

X_n	$-n$	0	n
P_i^n	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

18.

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
P_i^n	$1/n$	$1-\frac{2}{n}$	$1/n$

19.

X_n	$-3n$	0	$3n$
P_i^n	$\frac{1}{5n}$	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{3}{5n}$

20.

X_n	$-7n$	0	$7n$
P_i^n	$\frac{1}{5n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{4}{5n^2}$

21.

X_n	$-2n$	0	$2n$
P_i^n	$\frac{1}{3n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{2}{3n^2}$

22.

X_n	$-2\sqrt{n}$	0	$2\sqrt{n}$
P_i^n	$\frac{1}{4n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{3}{4n}$

23.

X_n	$-8n$	0	$8n$
P_i^n	$\frac{2}{7^n}$	$1-\frac{1}{7^{n-1}}$	$\frac{5}{7^n}$

24.

X_n	$-5n$	0	$5n$
P_i^n	$\frac{1}{3^n}$	$1-\frac{1}{3^{n-1}}$	$\frac{1}{3^n}$

25.

X_n	$-3\sqrt{n}$	0	$3\sqrt{n}$
P_i^n	$\frac{2}{5n}$	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{4}{5n}$

26.

X_n	$-6n$	0	$6n$
P_i^n	$\frac{1}{4n^2}$	$1-\frac{1}{2n^2}$	$\frac{3}{4n^2}$

27.

X_n	$-9n$	0	$9n$
P_i^n	$\frac{1}{3^n}$	$1-\frac{1}{3^{n-1}}$	$\frac{2}{3^n}$

28.

X_n	$-2\sqrt{n}$	0	$2\sqrt{n}$
P_i^n	$\frac{1}{3n}$	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{2}{3n}$

29.

X_n	$-5n$	0	$5n$
P_i^n	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

30.

X_n	$-7n$	0	$7n$
P_i^n	$\frac{2}{5^n}$	$1-\frac{1}{5^{n-1}}$	$\frac{3}{5^n}$

ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

3.1. Основные понятия математической статистики

Математическая статистика – это раздел математики, который изучает методы сбора, систематизации, обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений.

Любое множество, подлежащее изучению в статистике, называется *генеральной совокупностью*.

Любое подмножество генеральной совокупности называется *выборкой*.

Основная задача математической статистики состоит в получении обоснованных выводов о свойствах генеральной совокупности по известным свойствам извлеченной из нее выборки.

Количество элементов в генеральной совокупности или в выборке называется *объемом*. Элементы выборки могут характеризоваться числами, отражающими какой-либо признак изучаемого объекта. Эти числа называются *вариантами,* так как от выборки к выборке эти значения меняются.

Первым шагом в обработке полученных данных является составление статистического или вариационного ряда.

Вариационным рядом выборки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется способ ее записи, при котором элементы упорядочены по величине: $x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, ... x_{(n)}$, где $x_{(1)} \le x_{(2)} \le x_{(3)} \le ... \le x_{(n)}$.

Пусть в выборке объема n элемент x_i встречается m_i раз. Число m_i называется *частотой элемента* x_i. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, где k – количество различных элементов в данной выборке.

Статистическим рядом называется последовательность пар (x_i, m_i), где $i = 1, ..., k$. Обычно статистический ряд записывается в виде таблицы, первая строка которой содержит элементы x_i, а вторая их частоты m_i.

Пример 1. Пусть дана выборка: 5, 8, 1, 3, 2, 5, 2, 2, 8, 9. Упорядочив элементы выборки, получим вариационный ряд: 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 8, 8, 9.

Статистический ряд имеет вид (табл.3.1)

Таблица. 3.1

x_i	1	2	3	5	8	9
m_i	1	3	1	2	2	1

Для графического изображения статистического ряда частот служит ломаная в прямоугольной декартовой системе координат с вершинами в точках (x_i, m_i) – называемая *полигоном частот*, или ломаная с вершинами в точках $\left(x_i, \frac{m_i}{n}\right)$ – называемая *полигоном относительных частот*, где x_i – возможные значения вариант, m_i – частота, n – объем выборки.

При большом объеме выборки ее элементы объединяются в группы (разряды), представляя результаты опытов в виде *сгруппированного статистического ряда*. Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, разбивается на k непересекающихся интервалов, обычно одинаковой длины l. Согласно формуле Стерджеса, рекомендуемое число интервалов разбиения $k \approx 1 + \log_2 n$.

Для графического изображения сгруппированной выборки служит ступенчатая фигура из прямоугольников, называемая *гистограммой*. Для построения гистограммы на оси абсцисс откладываются интервалы длины l, которые служат основаниями прямоугольников, а их высоты определяются отношением $\frac{m_i}{l}$, если мы строим гистограмму частот, или $\frac{m_i}{n \cdot l}$, если мы строим гистограмму относительных частот.

Каждая генеральная совокупность имеет функцию распределения $F(x) = P(X < x)$, которая обычно неизвестна.

По выборке можно найти *эмпирическую функцию распределения* $F_n(x)$, определяемую соотношением: $F_n(x) = \sum\limits_{x_i < x} \frac{m_i}{n}$.

Значениями эмпирической функции распределения являются так называемые накопленные частоты.

Пример 2

а. Дан статистический ряд (табл. 3.2). Требуется построить полигон относительных частот.

Таблица 3.2

x_i значения вариант	15	16	17	18	19
m_i частоты	1	5	6	5	3

б. Дан сгруппированный статистический ряд (табл. 3.3). Требуется построить гистограмму относительных частот.

Таблица 3.3

Границы интервалов	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
Частоты	1	2	7	18	12

Решение. а. Для построения полигона частот найдем относительные частоты по формуле $\frac{m_i}{n}$, где $n=\sum_{i=1}^{5} m_i = 1+5+6+5+3=20$.
Результат запишем в таблицу m_i (табл. 3.4)

Таблица 3.4

x_i	15	16	17	18	19	$\sum$
m_i	1	5	6	5	3	20
$\frac{m_i}{n}$	1/20=0,05	5/20=0,25	6/20=0,3	5/20=0,25	3/20=0,15	1

Строим ломаную с координатами $\left(x_i, \frac{m_i}{n}\right)$ (рис. 3.1).

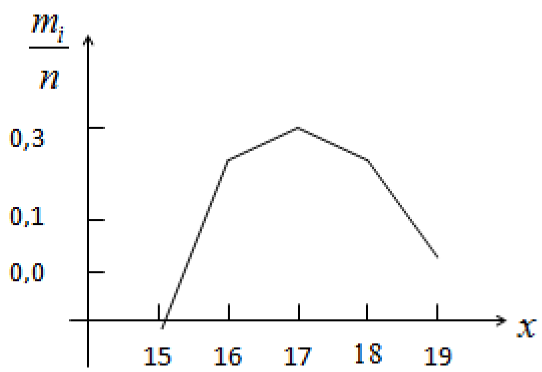

Рис. 3.1

Замечание. Обычно при построении полигона масштаб по осям берется неодинаковым.
б. Для построения гистограммы относительных частот найдем относительные частоты по формуле $\frac{m_i}{n}$, высоты прямоугольников – по формуле $h=\frac{m_i}{nl}$, где $n=\sum_{i=1}^{n} m_i = 1+2+7+18+12=40$, $l=10$. Величина h характеризует плотность попадания вариант в i–й интервал. Результаты удобно записать в табл. 3.5.

Таблица 3.5

$(x_i - x_{i-1})$	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	$\sum$
m_i	1	2	7	18	12	40
$\frac{m_i}{n}$	1/40 = 0,025	2/40 = 0,05	7/40 = 0,175	18/40 = 0,45	12/40 = 0,3	1
$\frac{m_i}{nl}$	0,025/10 = 0,0025	0,05/10 = 0,005	0,175/10 = 0,0175	0,45/10 = 0,045	0,3/10 = 0,03	0,1

Строим гистограмму (рис. 3 2).

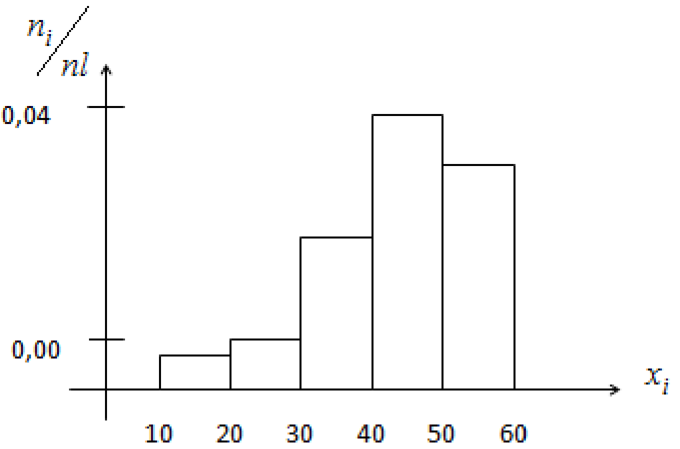

Рис. 3.2

3.2. Статистические оценки параметров распределения

3.2.1. Основные понятия

Пусть требуется изучить количественный признак генеральной совокупности. Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, какое именно распределение имеет признак. Возникает задача оценки параметров, которыми определяется это распределение.

Статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\theta^* = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ - результаты наблюдений над количественным признаком X (выборка).

Несмещенной называют статистическую оценку θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ при любом объеме выборки, то есть $M(\theta^*) = \theta$.

Эффективной называют статистическую оценку, которая при данном объеме выборки n имеет наименьшую дисперсию.

Состоятельной называют оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

3.2.2. Генеральная и выборочная средние

Пусть изучается генеральная совокупность относительно количественного признака X.

Генеральной средней называется среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ признака генеральной совокупности различны, то

$$\overline{x_Г} = \frac{x_1 + ... + x_N}{N},$$

где N – объем генеральной совокупности.

Если $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответствующие частоты $N_1, N_2, ..., N_k$, то $\overline{x_Г} = \frac{x_1 N_1 + ... + x_k N_k}{N}$, причем $\sum_{i=1}^{k} N_i = N$.

Генеральная средняя признака равна математическому ожиданию признака

$$\overline{x_Г} = M(X).$$

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X извлечена выборка объема n.

Выборочной средней называют среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборочной совокупности различны, то $\overline{x_В} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$.

Если $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответствующие частоты $m_1, m_2, ..., m_k$, то $\overline{x_В} = \frac{x_1 m_1 + ... + x_k m_k}{n}$, причем $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.

Выборочная средняя является несмещенной и состоятельной оценкой генеральной средней.

3.2.3. Генеральная и выборочная дисперсии

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят сводную характеристику – генеральную дисперсию.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то *генеральная дисперсия* определяется по формуле

$$D_Г = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_Г)^2}{N}.$$

Если $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответствующие частоты $N_1, N_2, ..., N_k$, то

$$D_Г = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \bar{x}_Г)^2}{N}, \text{ причем } \sum_{i=1}^{k} N_i = N.$$

Генеральное среднее квадратическое отклонение определяется по формуле

$$\sigma_Г = \sqrt{D_Г}.$$

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения $\overline{x}_B$, вводят сводную характеристику – выборочную дисперсию.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объема n различны, то *выборочная дисперсия* определяется по формуле

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2}{n}.$$

Если же $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответствующие частоты $m_1, m_2, ..., m_k$, то

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2}{n}, \text{ причем } \sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение определяется по формуле $\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}$.

В качестве несмещенной оценки генеральной дисперсии используют *исправленную выборочную дисперсию*:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{n}{(n-1)} \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2}{n-1}.$$

Для оценки среднеквадратического отклонения генеральной совокупности используют «исправленное» среднеквадратическое отклонение $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2}{n-1}}$, причем S уже не является несмещенной оценкой.

3.2.4. Интервальные оценки

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего параметр.

Доверительным называют интервал, который с заданной надежностью γ покрывает заданный параметр.

Интервальной оценкой (*с надежностью* γ) *математического ожидания* a *нормально распределенного количественного признака* X по выборочной средней $\overline{x}_{\text{в}}$ при известном среднеквадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\overline{x}_{\text{в}} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{в}} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точность оценки, n – объем выборки, t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$ (см. прил. табл. П1), при котором $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$; при *неизвестном среднеквадратическом отклонении* σ (и объеме выборки $n < 30$)

$$\bar{x}_{\text{В}} - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{\text{В}} + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}},$$

где S – «исправленное» выборочное среднеквадратическое отклонение, t_γ находят по таблице (см. прил. табл. П.7) по заданным n и γ.

Интервальной оценкой (*с надежностью* γ) *среднеквадратического отклонения* σ *нормально распределенного количественного признака* X по «исправленному» выборочному среднеквадратическому отклонению S служит доверительный интервал

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q) \text{ (при } q < 1),$$

$$0 < \sigma < S(1+q) \text{ (при } q > 1),$$

где q находят по табл. (см. прил. табл. П.8) по заданным n и γ.

3.2.5. Статистические гипотезы

Во многих случаях результаты наблюдений используются для проверки предположений (гипотез) относительно тех или иных свойств распределения генеральной совокупности. В частности, такого рода задачи возникают при сравнении различных технологических процессов или методов обработки по определенным измеряемым признакам, например, по точности, производительности и т. д.

Пусть X – наблюдаемая дискретная или непрерывная случайная величина.

Статистической гипотезой называется предположение относительно параметров или вида распределения случайной величины X.

Основной или *нулевой* гипотезой H_0 называют выдвинутую гипотезу, а гипотезу H_1, ей противоречащую – *конкурирующей* или *альтернативной.*

Простой называют выдвинутую гипотезу, содержащую только одно предположение.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

В итоге проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называют *уровнем значимости* и обозначают α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают β.

Статистическим критерием (*или просто критерием*) называют случайную величину K, которая служит для проверки гипотезы.

Обычно статистические критерии выражаются числами, которые вычисляются по вариантам выборки, или находятся теоретически. Значение критерия, найденное на основе выборки наблюдений случайной величины X, называют *выборочным* и обозначают $K_в$. Значение критерия, которое находится по таблице, называется *теоретическим* и обозначается K_T.

Проверка статистической гипотезы основывается на принципе, в соответствии с которым маловероятные события считаются невозможными, а события, имеющие большую вероятность, считаются достоверными.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (*областью допустимых значений*) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают. Можно сформулировать следующий основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу принимают.

Критическими точками (*границами*) $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр}$ – положительное число.

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр}$ – отрицательное число.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_1\ K > k_2$, где $k_2 > k_1$.

В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, то двусторонняя критическая область определяется неравенствами (в предположении, что $k_{кр} > 0$) $K < -k_{кр}$, $K > k_{кр}$ или $|K| > k_{кр}$.

Для отыскания критической области задаются уровнем значимости α и ищут критические точки, исходя из следующих соотношений:

1) для правосторонней критической области $P(K > k_{кр}) = \alpha \quad (k_{кр} > 0)$;

2) для левосторонней критической области $P(K < k_{кр}) = \alpha \quad (k_{кр} < 0)$;

3) для двусторонней симметричной критической области

$$P\left(K > k_{\text{кр}}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \left(k_{\text{кр}} > 0\right),\ P\left(K < -k_{\text{кр}}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Проверка значимости статистической гипотезы при помощи критерия значимости может быть разбита на следующие этапы:

1) сформулировать проверяемую (H_0) и альтернативную (H_1) гипотезы;

2) назначить уровень значимости α;

3) выбрать статистический критерий;

4) определить теоретическое (K_T) и выборочное $(K_в)$ значения критерия;

5) определить критическую область V_k;

6) принять статистическое решение: если $K_в \notin V_k$, то гипотезу (H_0) принять, т. е. считать, что гипотеза H_0 не противоречит результатам наблюдений; если $K_в \notin V_k$, то отклонить гипотезу H_0 как не согласующуюся с результатами наблюдений.

3.2.6. Критерий Пирсона χ^2 (хи-квадрат)

Этот критерий был введен английским математиком К. Пирсоном (1857 – 1936 гг.). Критерий служит для проверки гипотезы о виде распределения случайной величины X.

Таким образом, пусть имеется сгруппированный статистический ряд, разбитый на k интервалов, где k — заранее выбранное число, m_i – число вариант, попадающих в i интервал, n – объем выборки, $p_i = P\left(x_{i-1} \le X \le x_i\right)$ – вероятность попадания случайной величины X в i – тый интервал при выбранном законе распределения случайной величины. При этих условиях Пирсон предложил в качестве критерия K рассмотреть случайную величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},\ (m_i - \text{случайные величины}).$$

Он доказал, что χ^2 при больших k практически не зависит от гипотетического распределения и определяется функцией плотности

$$\psi_r(u) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)u} u^{\frac{r}{2}-1} \cdot e^{-\frac{r}{2}},\ u \ge 0,$$

где r – число степеней свободы, определяемое по формуле $r = k - m - 1$, здесь m – число параметров гипотетического закона распределения, подлежащих определению по опытным данным.

График функции плотности $\psi_r(u)$ имеет вид (рис. 3.3)

Рис. 3.3

Критерий χ^2 заключается в следующем. По опытным данным считают выборочное значение критерия Пирсона

$$\chi^2_{в} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

(m_i – выборочные частоты).

По таблице критических точек распределения χ^2 (см. прил. П4) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы r находят теоретическое значение критерия Пирсона χ^2_T.

Если значение $\chi^2_{в}$ окажется больше или равно χ^2_T, то гипотезу отвергают. Если $\chi^2_{в}$ меньше χ^2_T, то гипотезу считают не противоречащей опытным данным.

При использовании критерия хи-квадрат рекомендуем промежуточные результаты заносить в таблицу (3.6)

Замечание. Разбивку на интервалы надо производить так, чтобы в каждом из них было 5 – 10 наблюдений. Интервалы, содержащие мало наблюдений, рекомендуется объединять с соседними.

Таблица 3.6

$(x_{i-1}, x_i]$	m_i	p_i	np_i	$m_i - np_i$	$(m_i - np_i)^2$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
$(x_0, x_1]$	m_1	p_1	np_1	$m_1 - np_1$	$(m_1 - np_1)^2$	$\frac{(m_1 - np_1)^2}{np_1}$
-	-	-	-	-	-	
$(x_{k-1}, x_k]$	m_k	p_k	np_k	$m_k - np_k$	$(m_k - np_k)^2$	$\frac{(m_k - np_k)^2}{np_k}$

Пример 1. Даны результаты наблюдений некоторой случайной величины X (табл. 3.7.). Проверить гипотезу о ее нормальном распределении.

Таблица3.7

Интервалы	3,5-4,5	4,5-5,5	5,5-6,5	6,5-7,5	7,5-8,5	8,5-9,5
Число вариант	6	13	25	16	11	9

Решение

1. Построим гистограмму относительных частот (рис. 3.4), данные для ее построения занесем в таблицу (3.8) ($n=\sum m_i = 80$, длина интервалов $l=1$).

Таблица 3.8

$(x_{i-1},x_i]$	(4) 3,5-4,5	(5) 4,5-5,5	(6) 5,5-6,5	(7) 6,5-7,5	(8) 7,5-8,5	(9) 8,5-9,5
m_i	6	13	25	16	11	9
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{6}{80}=0{,}075$	$\frac{13}{80}=0{,}1625$	$\frac{25}{80}=0{,}3125$	$\frac{16}{80}=0{,}2$	$\frac{11}{80}=0{,}1375$	$\frac{9}{80}=0{,}11125$
$h=\frac{m_i}{nl}$	0,075	0,1625	0,3125	0,2	0,1375	0,1125

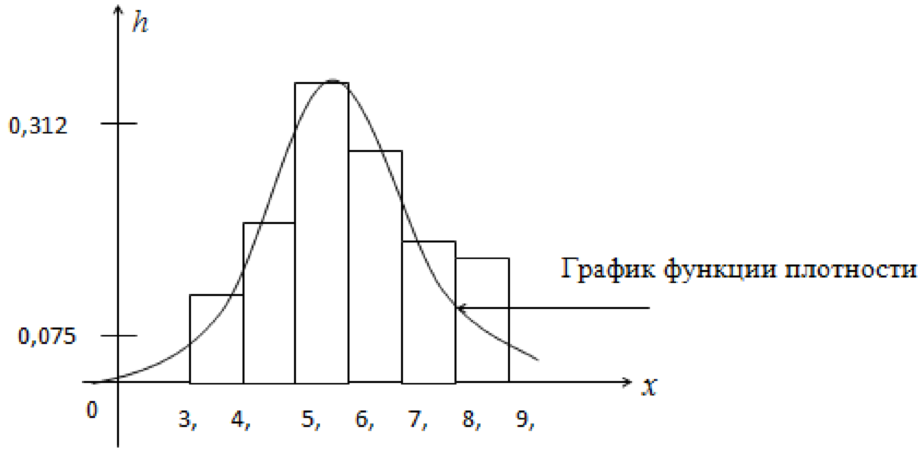

Рис. 3.4

2. По виду гистограммы можно предположить, что наблюдаемая случайная величина имеет нормальное распределение – $N(a,\sigma^2)$.

Функция плотности вероятности нормального распределения имеет вид $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где параметры a и σ неизвестны.

В качестве значений параметров распределения возьмем их оценки, полученные на основе опытных данных. Оценкой параметра a является величина

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i m_i=\frac{(x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k)}{n},$$

оценкой параметра σ^2 является величина

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 m_i.$$

В этих формулах x_i – середина i-го интервала.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i m_i = \frac{1}{80}(4\cdot 6 + 5\cdot 13 + 6\cdot 25 + 7\cdot 16 + 8\cdot 11 + 9\cdot 9) = 6{,}5.$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2 m_i = \frac{1}{79}\Big((4-6{,}5)^2\cdot 6 + (5-6{,}5)^2\cdot 13 + (6-6{,}5)^2\cdot 25 +$$
$$\Big((7-6{,}5)^2\cdot 11 + (8-6{,}5)^2\cdot 9\Big) = 1{,}97 \Rightarrow s = \sqrt{1{,}97} = 1{,}4.$$

Таким образом, выдвигаем гипотезу о том, что изучаемая случайная величина имеет функцию плотности вероятности

$$f(x) = \frac{1}{1{,}4\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-6{,}5)^2}{2\cdot 1{,}97}}.$$

Ее график построим на том же чертеже, что и гистограмму (рис. 3.4). Для построения достаточно найти точки максимума $x_{\max} = \bar{x} = 6{,}5$, $y_{\max} = \frac{0{,}4}{s} = \frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}97}} \approx 0{,}28$ и точки перегиба $x_{\text{пер}} = \bar{x} \pm s = 6{,}5 \pm 1{,}4$, $y_{\text{пер}} = \frac{0{,}24}{s} = \frac{0{,}24}{\sqrt{1{,}97}} \approx 0{,}17$. Затем эти точки следует соединить плавной линией, учитывая форму кривой нормального распределения (рис. 3.4).

3. Зададимся уровнем значимости, например, $\alpha = 0{,}05$. Для получения надежных выводов на основе критерия хи-квадрат нужно объединить первый интервал, содержащий мало наблюдений, со вторым интервалом. Тогда имеем всего $k = 5$ интервалов. Определим $\chi^2_T(\alpha, r)$, $r = k - m - 1 = 5 - 3 = 2$ (r – число степеней свободы, m – число неизвестных параметров). Итак, $\chi^2_T(0{,}05; 2) = 5{,}99$.

4. Вычислим $\chi^2_в = \sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$ Для этого сначала вычислим вероятности, попадания исследуемой случайной величины в каждый интервал, согласно гипотезе. В случае нормального распределения они вычисляются по формуле

$$p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}}{s}\right).$$

Тогда

$$P(3{,}5 < X < 5{,}5) = \Phi\left(\frac{5{,}5 - 6{,}5}{\sqrt{1{,}97}}\right) - \Phi\left(\frac{3{,}5 - 6{,}5}{\sqrt{1{,}97}}\right) = 0{,}22,$$

$$P(5{,}5 < X < 6{,}5) = \Phi\left(\frac{6{,}5 - 6{,}5}{\sqrt{1{,}97}}\right) - \Phi\left(\frac{5{,}5 - 6{,}5}{\sqrt{1{,}97}}\right) = 0{,}26,$$

где $\Phi(x)$ функция – Лапласа. Аналогично $P(6{,}5 < x < 7{,}5) = 0{,}16$, $P(7{,}5 < x < 8{,}5) = 0{,}16$, $P(8{,}5 < x < 9{,}5) = 0{,}06$.

Вычисления χ^2 удобно вести, фиксируя промежуточные результаты в табл. 3.9.

Таблица 3.9

m_i	p_i	np_i	$m_i - np_i$	$(m_i - np_i)^2$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
19	0,22	17,6	1,4	1,96	0,11
25	0,26	20,8	4,2	17,64	0,85
16	0,26	20,8	4,8	23,06	1,11
11	0,16	12,8	1,8	3,24	0,25
9	0,08	4,8	4,2	17,64	3,89

Величина $\chi^2_в$ равна сумме значений в последнем столбце таблицы $\chi^2_в = 6{,}21$.

5. Сравним $\chi^2_в$ и $\chi^2_T : \chi^2_в = 6{,}21 > \chi^2_T = 5{,}99$. Таким образом, при выбранном уровне значимости $\chi^2_в$ принадлежит критической области V_k, а значит гипотезу о нормальном распределении следует отвергнуть. Следует отметить, что вероятность того, что мы ошибаемся, меньше 0,05.

3.3. Линейная корреляция

Две случайные величины X и Y могут быть функционально зависимы, статистически зависимы или независимы. Наиболее простой формой зависимости между величинами является функциональная зависимость, при которой каждому значению одной величины соответствует определенное значение другой. Однако на практике связь между величинами носит случайный характер.

Статистической называется зависимость, при которой изменение одной из случайных величин ведет к изменению закона распределения другой величины. В частности, если при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой, то статистическая зависимость называется корреляционной. Статистическая зависимость более сложна, чем функциональная. Она возникает, если одна величина зависит не только от другой, но и от ряда прочих случайных факторов. Примерами статистической зависимости являются связи между ростом ребенка и его возрастом, между урожайностью ягодных культур и их рыночными ценами, между температурой закалки и твердостью стали и т. д.

Пусть произведено n независимых опытов, в которых наблюдались случайные величины X и Y. В результате опытов получены пары чисел $\left(x_i, y_j\right)(i = \overline{1,l};\ j = \overline{1,k})$.

Данные сводят в корреляционную таблицу 3.10.

Таблица 3.10

X/Y	y_1	y_2	...	y_k	n_x	$\overline{y_x}$
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1k}	n_{x_1}	$\overline{y_{x_1}}$
x_2	n_{21}	n_{22}	...		n_{x_2}	$\overline{y_{x_2}}$
x_l	n_{p1}	n_{p2}		n_{lk}	n_{x_l}	$\overline{y_{x_l}}$
n_y	n_{y_1}	n_{y_2}		n_{y_k}	n	

В первой строке табл. 3.10 указаны наблюденные значения случайной величины $Y: y_1, y_2, ..., y_k$; в первом столбце – величины $X: x_1, x_2, ..., x_l$. На пересечении строк и столбцов вписаны частоты n_{ij} наблюдаемых пар значений случайных величин. Пустая клетка означает, что соответствующая пара чисел в результате опытов не наблюдалась. В столбце n_x записаны суммы частот строк, в строке n_y – суммы частот столбцов, причем $\sum n_{x_i} = \sum n_{y_j} = n$ – объем выборки.

Назовем условным средним $\overline{y_x}$ среднее арифметическое значений случайной величины Y, соответствующих значению $X = x$.

Уравнение $\overline{y_x} = f(x)$ называют *уравнением регрессии* Y *на* X; функцию $f(x)$ называют *регрессией* Y *на* X, а ее график – *линией регрессии*. Если функция регрессии $f(x)$ известна, то можно по значению одной случайной величины прогнозировать значение другой случайной величины. Корреляция называется линейной, если линия регрессии является прямой, т. е. $\overline{y_x} = ax + b$.

Ломаная, соединяющая точки $M_i\left(x_i, \overline{y_{x_i}}\right)$, называется *эмпирической (опытной) линией регрессии*. Если точки $M_i\left(x_i, \overline{y_{x_i}}\right)$ располагаются около некоторой прямой (рис. 3.5), то в качестве уравнения теоретической линии регрессии берется $f(x) = ax + b$, где коэффициенты находятся по следующим формулам:

$$a = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x};\ b = \overline{y} - a\,\overline{x},\ (r_{xy} \text{ определен далее}).$$

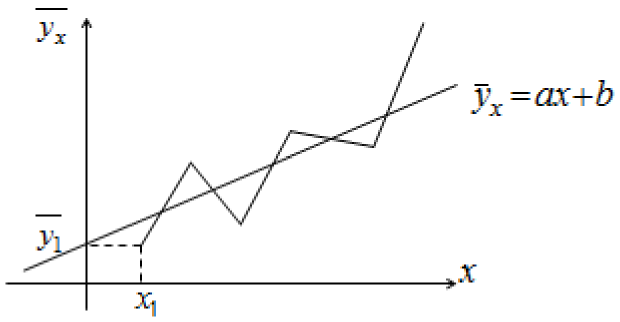

Рис. 3.5

Ковариацией двух случайных величин X и Y называется числовая характеристика $\operatorname{cov}(X,Y) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)$.

Коэффициентом корреляции между случайными величинами X и Y называется безразмерная величина $r_{xy} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$; где σ_x, σ_y – средние квадратические отклонения величин X и Y.

Коэффициент корреляции r_{xy} характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами X и Y, при этом связь тем теснее, чем ближе $|r_{xy}|$ к единице ($-1 \le r_{xy} \le 1$).Для характеристики тесноты связи между случайными величинами X и Y применяется таблица Чеддока (3.11).

Таблица 3.11

Диапазон измерения выборочного $\lvert r_{xy} \rvert$	Характер тесноты
0,1-0,3	Слабая
0,3-0,5	Умеренная
0,5-0,7	Заметная
0,7-0,9	Высокая
0,9-0,99	Линейная

Если $r_{xy} > 0$, то при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию в среднем возрастать. Если $r_{xy} < 0$, то при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию в среднем убывать.
Если $r_{xy} = 0$, то линейная корреляционная связь отсутствует, и случайные величины называются некоррелированными.
Если $|r_{xy}|\sqrt{n-1} \ge 3$, то связь между случайными величинами X и Y достаточно вероятна.

Чтобы сделать обоснованные выводы о тесноте зависимости между случайными величинами X и Y по опытным данным, нужно установить значимость коэффициента корреляции, т. е. проверить нулевую гипотезу H_0 о том, что $r_{xy} = 0$.

По опытным данным вычисляют критерий проверки

$$T_{\text{набл.}} = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}.$$

При заданном уровне значимости α и числу степеней свободы $r = n-2$ находят критическое значение $t_{\text{крит}}$ для двусторонней критической области по таблице Стьюдента (см. прил. П.3).

Если $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{крит}}$, то выдвинутую гипотезу H_0 принимают, т. е. выборочный коэффициент незначим, а случайные величины X и Y некоррелированы.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{крит}}$ - гипотезу H_0 отвергают, т. е. выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, а случайные величины коррелированны.

Пример 1. Вычислить выборочный коэффициент корреляции r_{xy}, проверить его значимость и найти уравнение линии регрессии. Данные приведены в табл. 3.12.

Таблица 3.12

X	Y						
	16,5-19,5	19,5-22,5	22,5-25,5	25,5-28,5	28,5-21,5	31,5-34,5	34,5-37,5
97,5-102,5	6	3	1				
102,5-107,5				4	3	2	
107,5-112,5			6	5	2		
112,5-117,5			1	6	3		
117,5-122,5			2	3	9	2	1
122,5-127,5				5	7	3	
127,5-132,5			1		4	4	
132,5-137,5				1	5	1	
137,5-142,5					2	4	4

Решение. Найдем условные средние, соответствующие значению $X = x_i$, по формуле $\overline{y}_{x_i} = \dfrac{1}{n_{x_i}}\sum_{j=1}^{7} y_j n_{ij}$.

Тогда $\overline{y}_{x_1} = \dfrac{1}{10}(18\cdot 6 + 21\cdot 3 + 24\cdot 1) = 19{,}5$; $\overline{y}_{x_2} = \dfrac{1}{9}(27\cdot 4 + 30\cdot 3 + 33\cdot 2) = 29{,}4$ и т.д.

Составим корреляционную таблицу (3.13)

Таблица 3.13

X/Y	18	21	24	27	30	33	36	n_{x_i}	$\overline{y}_{x_i}$
100	6	3	1					10	19,5
105				4	3	2		9	29,4
110			6	5	2			13	26,1
115			1	6	3			10	27,6
120			2	3	9	2	1	17	29,5
125				5	7	3		15	29,6
130			1		4	4		9	30,7
135				1	5	1		7	30,0
140					2	4	4	10	33,6
n_{y_j}	6	3	11	24	35	16	5	100	

Контроль расчетов: $n=\sum n_{x_i}=\sum n_{y_j}=100$ – объем выборки.

Для построения эмпирической линии регрессии точки $M_1(100;19{,}5)$, $M_2(105;\,29{,}4),\ldots,M_9(140;\,33{,}6)$ соединим ломаной линией (рис. 3.6).

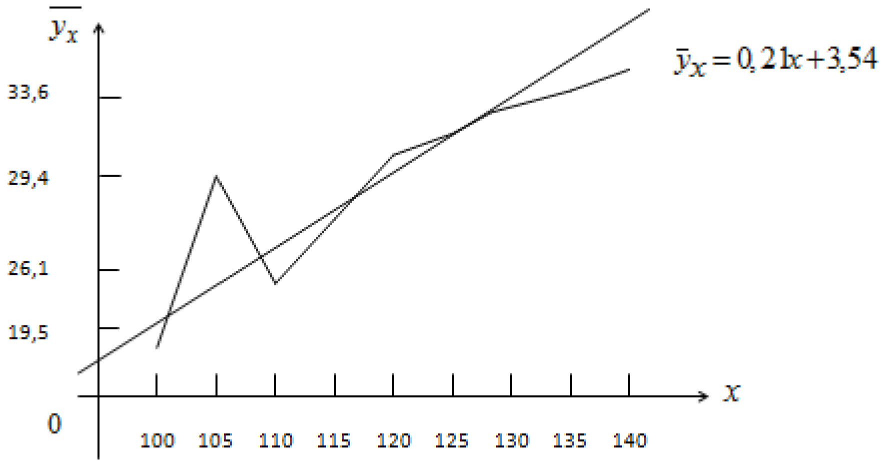

Рис. 3.6

Для нахождения выборочного коэффициента линейной корреляции r_{xy} находим

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{9}x_i n_{x_i}=\frac{1}{100}(100\cdot10+105\cdot9+110\cdot13+115\cdot10+120\cdot17+$$
$$+125\cdot15+130\cdot9+135\cdot7+140\cdot10)=119{,}55.$$

$$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7}y_j n_{y_j}=\frac{1}{100}\left(18\cdot6+21\cdot3+24\cdot11+27\cdot24+30\cdot35+33\cdot16+36\cdot5\right)=28{,}41$$

Вспомогательно найдем

$$\sum_{i=1}^{9}(x_i)^2 n_{x_i}=(100)^2\cdot10+(105)^2\cdot9+(110)^2\cdot13+\ldots+(140)^2\cdot10=1443625;$$

$$\sum_{j=1}^{7}\left(y_j\right)^2 n_{y_j} = (18)^2\cdot 18 + (21)^2\cdot 3 + (24)^2\cdot 11 + \ldots + (36)^2\cdot 5 = 82503;$$

$$\sum_{i,j} x_i y_j n_{i\,j} = 100\cdot 18\cdot 6 + 100\cdot 21\cdot 3 + 100\cdot 24\cdot 1 + 105\cdot 27\cdot 4 + 105\cdot 30\cdot 3 +$$
$$+105\cdot 33\cdot 2 + 110\cdot 24\cdot 6 + 110\cdot 27\cdot 5 + 110\cdot 30\cdot 2 + 115\cdot 24\cdot 1 +$$
$$+115\cdot 27\cdot 6 + 115\cdot 30\cdot 3 + 120\cdot 24\cdot 2 + 120\cdot 27\cdot 3 + 120\cdot 30\cdot 9 +$$
$$+120\cdot 33\cdot 2 + 120\cdot 36\cdot 1 + 125\cdot 27\cdot 5 + 125\cdot 30\cdot 7 + 125\cdot 33\cdot 3 +$$
$$+130\cdot 24\cdot 1 + 130\cdot 30\cdot 4 + 130\cdot 33\cdot 4 + 135\cdot 27\cdot 1 + 135\cdot 30\cdot 5 +$$
$$+135\cdot 33\cdot 1 + 140\cdot 30\cdot 2 + 140\cdot 33\cdot 4 + 140\cdot 36\cdot 4 = 342600.$$

Тогда

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{9}\left(x_i\right)^2 n_{x_i} - (\overline{x})^2 = \frac{1}{100}1443625 - (119{,}55)^2 = 144{,}05 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{144{,}05} = 12{,}002.$$
$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{7}\left(y_j\right)^2 n_{y_j} - (\overline{y})^2 = \frac{1}{100}82503 - (28{,}41)^2 = 17{,}9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_y = \sqrt{17{,}9} = 4{,}23.$$

Определим ковариацию между X и Y по формуле

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i,j} x_i y_j n_{i\,j} - \overline{x}\,\overline{y} = \frac{1}{100}342600 - 119{,}55\cdot 28{,}41 = 29{,}585.$$

Находим коэффициент корреляции

$$r_{x\,y} = \frac{29{,}585}{12{,}002\cdot 4{,}29} = 0{,}59.$$

Имеем $\left|r_{x\,y}\right|\sqrt{n-1} = 0{,}59\sqrt{99} = 5{,}87 > 3$, следовательно, связь между случайными величинами X и Y достаточно вероятна.
Для проверки значимости коэффициента корреляции проверим нулевую гипотезу $H_0 : r_{x\,y} = 0$; конкурирующая гипотеза $H_1 : r_{x\,y} \neq 0$.

Найдем по опытным данным величину

$$T_{\text{набл}} = \frac{0{,}59\sqrt{98}}{\sqrt{1-(0{,}59)^2}} = 8{,}99.$$

Найдем критическое значение $t_{\text{крит}}$ по таблице критерия Стьюдента (см. приложения) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числе степеней свободы $r = n - 2 = 98 \Rightarrow t_{\text{крит}} = 1{,}98$. Тогда $\left|T_{\text{набл}}\right| > t_{\text{крит}}$, поэтому гипотезу H_0 отвергаем и принимаем гипотезу H_1, т. е. случайные величины X и Y коррелированы. По виду эмпирической линии регрессии можно предположить, что между случайными величинами существует линейная корреляция, т. е. $\overline{y}_x = ax + b$.

Находим коэффициенты a и b:

$$a = 0{,}59\frac{4{,}23}{12{,}002} = 0{,}21,\ \ b = 28{,}41 - 0{,}21 \cdot 119{,}55 = 3{,}54.$$

Тогда уравнение линейной регрессии

$$\overline{y}_x = 0{,}21x + 3{,}54.$$

Для построения полученной прямой возьмем две точки

x	110	140
$\overline{y}_x$	26,4	32,7

График прямой $\overline{y}_x$ достаточно близко расположен по отношению к опытной линии регрессии. Коэффициент корреляции $r_{xy} = 0{,}59$ показывает, что зависимость между случайными величинами X и Y заметная и с увеличением значений одной случайной величины значения другой случайной величины имеют тенденцию в среднем увеличиваться.

3.4. Метод наименьших квадратов

Рассмотрим один из методов, позволяющих проанализировать и обработать данные, полученные в результате эксперимента (табл. 1). Пусть в результате измерений получена таблица зависимости одной величины y от другой x.

Таблица1

x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_n

Необходимо найти формулу $y = f(x)$, выражающую таблично заданную зависимость аналитически.Найдем функцию заданного вида $y = f(x)$, которая в точках $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ принимает значения как можно более близкие к табличным значениям $y_1, y_2, y_3, y_4, ..., y_n$.

Практически вид приближающей функции можно определить визуально: по приведенной таблице строится точечный график функции, а затем проводится кривая, по возможности наилучшим образом отражающая характер расположения точек (рис. 3.7).

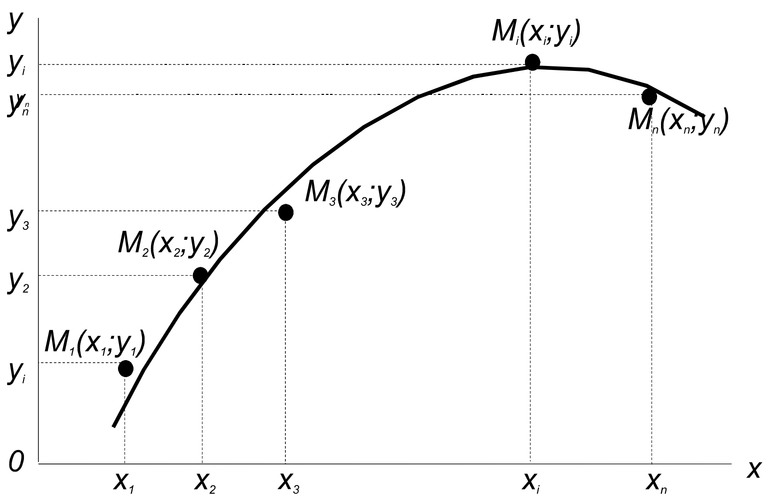

Рис. 3.7

По полученной кривой устанавливается вид приближающей функции (обычно из числа простых по виду аналитических функций: линейная, степенная, экспоненциальная или показательная, логарифмическая, гипербола, дробно-рациональная и т.д.).

Из рис. 3.7 видно, что для каждого значения x_i экспериментальное y_i и расчетное y_i^p значения различаются на некоторую величину Δy_i, называемую абсолютной разностью. Потребовав, чтобы сумма квадратов абсолютных разностей для всех точек была минимальной, найдем оптимальные параметры функции $f(x)$: если выполняется условие

$$m = \min \sigma = \min\left(\sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 \right),$$

где $\Delta y_i = y_i - y_i^p = y_i - f(x_i)$, то считается, что функция $f(x)$ подобрана наилучшим образом.

Рассмотрим все изложенное выше на примере линейной регрессии. Будем искать приближающую функцию в виде $y = f(x,k,b) = kx + b.$ Абсолютная разность Δy_i для x_i определяется следующим образом: $\Delta y_i = y_i - y_i^p = y_i - f(x_i) = y_i - (kx_i + b).$

Тогда $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - (kx_i + b))^2.$

Рассматриваемая сумма является функцией двух переменных $\sigma = F(k,b)$. Задача сводится к отысканию минимума этой функции. Используем необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(k,b)}{\partial k} = 0, \\ \dfrac{\partial F(k,b)}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma}{\partial k} = \dfrac{\partial\sum\limits_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2}{\partial k} = \dfrac{\partial\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-(kx_i+b))^2}{\partial k} = 0, \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial b} = \dfrac{\partial\sum\limits_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2}{\partial b} = \dfrac{\partial\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-(kx_i+b))^2}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Решив систему двух уравнений с двумя неизвестными относительно параметров k и b, получим конкретный вид искомой функции $y = kx + b$. Опуская математические выкладки, запишем выражения для искомых параметров:

$$k = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2};$$

$$b = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} y_i - k\sum_{i=1}^{n} x_i).$$

Как видно из рассмотренного примера, изменение количества параметров не приведет к искажению сущности самого подхода, изменится лишь количество уравнений в системе (для n параметров соответственно будет записано n уравнений). Далее приведены наиболее используемые функции.

1. *Степенная зависимость* (*геометрическая регрессия*)

Степенная зависимость (рис. 3.8) имеет вид

$$y = ax^b \tag{3.1}$$

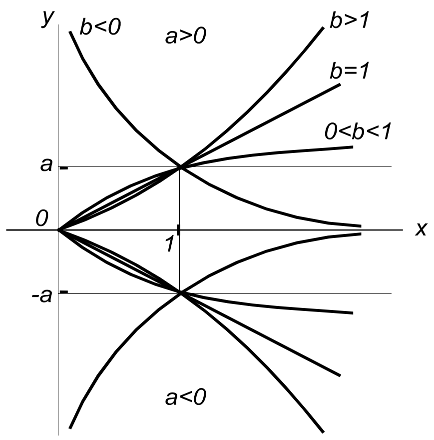

Рис. 3.8

Покажем, как нахождение приближающей функции в виде геометрической регрессии может быть сведено к нахождению параметров линейной функции. Предполагая, что в исходной таблице 3.14 значения аргумента и функции положительны, прологарифмируем равенство (3.1) при условии $a > 0$:

$$\ln y = \ln a + b \ln x. \tag{3.2}$$

Введем новую переменную $t = \ln x$, тогда $\ln y$ будет функцией от t. Обозначим $A = \ln a, q = \ln y,$ тогда равенство (3.2) примет вид

$$q(t) = A + bt,$$

т.е. задача свелась к отысканию приближающей функции в виде линейной.

Практически для нахождения приближающей функции в виде степенной (при сделанных ранее предположениях) необходимо проделать следующие операции:

1) по данной табл. 1 составить новую табл. 2, прологарифмировав значения x и y в исходной таблице.

Таблица 1 Таблица 2

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n	t	$\ln x_1$	$\ln x_2$	$\ln x_3$	…	$\ln x_n$
$f(x)$	y_1	y_2	y_3	…	y_n	$q(t)$	$\ln y_1$	$\ln y_2$	$\ln y_3$	…	$\ln y_n$

2) по новой табл. 2 найти параметры A и b приближающей функции вида $q(t) = A + bt$;

3) используя примененные обозначения, найти значения параметров a , b . Окончательно получаем

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \ln y_i - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \sum_{i=1}^{n}\ln y_i}{n\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2} \tag{3.3}$$

$$a = \exp\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln y_i - k\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)\right)$$

2. *Показательная зависимость*

Показательная зависимость (рис. 3.9) имеет вид

$$y = f(x, a, k) = ae^{kx}. \tag{3.4}$$

Прологарифмируем равенство (3.4):

$$\ln y = \ln a + kx, \tag{3.5}$$

приняв обозначения, $\ln y = q,\ \ln a = A,$ перепишем (3.5) в виде

$$q(x) = kx + A. \tag{3.6}$$

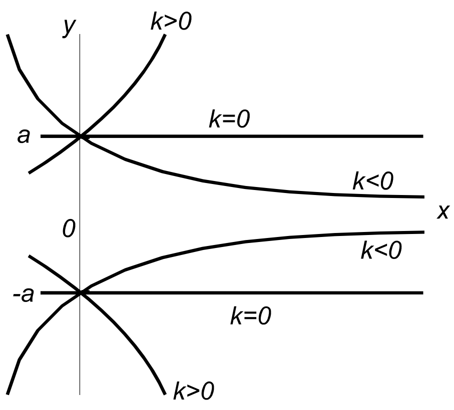

Рис. 3.9

Таким образом, приближающая показательная функция нехитрыми преобразованиями сведена к линейной, следовательно, для определения коэффициентов a и k показательной функции можно воспользоваться выведенными для линейной функции формулами.

Итак, для нахождения приближающей функции в виде (3.4) нужно прологарифмировать значения функции в исходной табл. 1 и, рассматривая их совместно с исходными значениями аргумента, построить для новой табл. 3 приближающую функцию.

Таблица 1

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Таблица 3

t	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$q(x)$	$\ln y_1$	$\ln y_2$	$\ln y_3$	…	$\ln y_n$

Окончательно получаем

$$k = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \ln y_i}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a = \exp\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \ln y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right). \tag{3.7}$$

Замечание. Функциям

$$y = ax^k + c \tag{3.8}$$

$$y = ae^{kx} + c \tag{3.9}$$

соответствуют кривые, сдвинутые вверх или вниз на величину c. Чтобы найти параметры этих формул, следует сначала определить значение c. Иногда величину c можно легко найти по значению, к которому стремится y при возрастании x (при $k < 0$) или по значению y при $x = 0$ (при $k > 0$).

Можно также воспользоваться формулой

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}, \tag{3.10}$$

где y_1, y_2 – ординаты произвольных (но достаточно далеких) точек с абсциссами x_1, x_2, а ордината y_3 соответствует абсциссе $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ в случае (3.8) и абсциссе $x_3 = 1/2(x_1 + x_2)$ в случае (3.9).

3. *Логарифмическая функция.*

Будем искать приближающую функцию (рис. 3.10) в виде

$$y = f(x, a, b) = a\ln x + b. \tag{3.11}$$

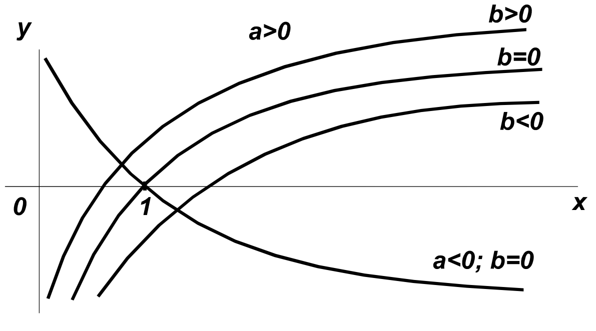

Рис. 3.10

Для перехода к линейной функции достаточно выполнить подстановку $t = \ln x$. Отсюда следует, что для нахождения значений aи b нужно прологарифмировать значения аргумента в исходной табл. 1 и для новой табл. 4 найти приближающую функцию в виде линейной $y=at+b$.

Таблица 1

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Таблица 4

t	$\ln x_1$	$\ln x_2$	$\ln x_3$	…	$\ln x_n$
$f(t)$	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Окончательно получим

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i \ln x_i - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2},$$
$$b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln y_i - a\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right). \qquad (3.12)$$

Для решения задачи приближения функции методом наименьших квадратов сформулируем основные шаги алгоритма.

1. Ввод исходных данных.
2. Выбор вида уравнения регрессии.
3. Преобразование данных к линейному типу зависимости.
4. Получение параметров уравнения регрессии.
5. Обратное преобразование данных и вычисление суммы квадратов отклонений вычисленных значений функции от заданных.
6. Вывод результатов.

Пример построения различных видов аппроксимирующих функций

При испытаниях на железнодорожном пути под воздействием гармонической нагрузки производилась регистрация величин прогибов рельсов под точкой приложения нагрузки и на различные расстояния от точки приложения нагрузки. В результате исследования были получены следующие значения y – амплитуд прогибов рельсов в зависимости от x – расстояний от точки приложения нагрузки (табл. 3.14).

Таблица 3.14

x (см)	0	25	50	75	100
y (мм)	10	9,1	8,7	5,6	2,5

Требуется построить методом наименьших квадратов функцию, приближающую табличную наилучшим образом.

Для удобства обозначений изменим нумерацию исходных данных и будем считать, что $x_1 = 0$; $x_2 = 25$; $x_3 = 50$; $x_4 = 75$; $x_5 = 100$; $y_1 = 10$; $y_2 = 9{,}1$; $y_3 = 8{,}7$; $y_4 = 5{,}6$; $y_5 = 2{,}5$. Сделаем предположение относительно характера аппроксимирующей функции, рассмотрев расположение точек, заданных таблицей, на графике (рис. 3.11).

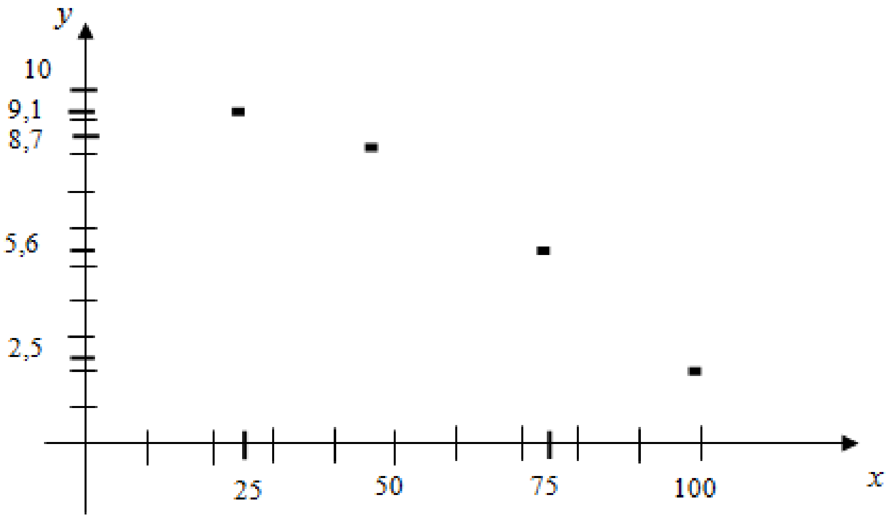

Рис. 3.11

По характеру расположения точек на графике можно выдвинуть предположение о линейной, квадратичной или показательной зависимости величин. Рассмотрим все три предположения.

Случай 1. Будем искать приближающую функцию $y(x)$ в виде линейной функции $y(x) = ax + b$. Сумма мер отклонений $S = \sum_{i=1}^{n}((ax_i + b) - y_i)^2$, где $i = 1,2,3,4,5$; $n = 5$ – число измерений. Найдём неизвестные коэффициенты из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)\cdot x_i = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

После преобразования система принимает вид:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (3.13)$$

Составим вспомогательную табл. 3.15.

Таблица 3.15

	x	y	x^2	$x \cdot y$
	0	10	0	0
	25	9,1	625	227,5
	50	8,7	2500	435
	75	5,6	5625	420
	100	2,5	10000	250
$\sum$	250	35,9	18750	1332,5

Подставив данные из табл. 3.15 в систему (3.13), получим

$$\begin{cases} 18750 \cdot a + 250 \cdot b = 1332{,}5 \\ 250 \cdot a + 5 \cdot b = 35{,}9 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = -0{,}074 \\ b = 10{,}88 \end{cases}.$$

Уравнение линейной функции $y = -0{,}074 \cdot x + 10{,}88$.

Случай 2. Аппроксимирующая функция – квадратичная: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Сумма мер отклонений $S = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2$. Неизвестные коэффициенты найдем из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot x_i^2 = 0 \end{cases},$$

преобразовав которую, получим

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases} \qquad (3.14)$$

Составим вспомогательную таблицу 3.16.

Таблица 3.16

	x	x^2	x^3	x^4	y	$x \cdot y$	$x^2 \cdot y$
	0	0	0	0	10	0	0
	25	625	15625	390625	9,1	227,5	5687,5
	50	2500	125000	6250000	8,7	435	21750
	75	5625	421875	31640625	5,6	420	31500
	100	10000	1000000	100000000	2,5	250	25000
$\sum$	250	18750	1562500	138281250	35,9	1332,5	83937,5

Подставим данные из таблицы 3.16 в систему (3.14):

$$\begin{cases} 5\cdot a_0 + 250\cdot a_1 + 18750\cdot a_2 = 35{,}9, \\ 250\cdot a_0 + 18750\cdot a_1 + 1562500\cdot a_2 = 1332{,}5, \\ 18750\cdot a_0 + 1562500\cdot a_1 + 138281250\cdot a_2 = 83937{,}5, \end{cases}$$

решив её, получим значения параметров:

$$\begin{cases} a_0 = 9{,}865714721 \\ a_1 = 0{,}0071428579 \\ a_2 = -0{,}00081142 \end{cases}$$

Уравнение квадратичной зависимости

$y = 9{,}865714721 + 0{,}007142857\cdot x - 0{,}000811429\cdot x^2$.

Случай 3. Найдем приближающую функцию в виде $y = a_0 e^{a_1 x}$. После логарифмирования показательной функции $\ln y = \ln a_0 + a_1 x$ и введения обозначений $\psi(x) = \ln y$; $\ln a_0 = b_0$; $a_1 = b_1$, функция $\psi(x)$ записывается как линейная $\psi(x) = b_0 + b_1 x$.

Построим таблицу соответствия известных значений (табл. 3.17)

Таблица 3.17

	x	y	$\psi(x)$	x^2	$x\cdot\psi(x)$
	0	10	2,30	0	0
	25	9,1	2,20	625	55
	50	8,7	2,16	2500	108
	75	5,6	1,72	5625	129
	100	2,5	0,92	10000	92
$\sum$	250	35,9	9,3	18750	384

Запишем систему

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \psi_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot x_i. \end{cases} \tag{3.15}$$

Подставим данные из табл. 3.17 в систему (3.15):

$$\begin{cases} 5\cdot b_0 + 250\cdot b_1 = 9{,}3 \\ 250\cdot b_0 + 18750\cdot b_1 = 384 \end{cases} \begin{cases} b_0 = 2{,}508 \\ b_1 = -0{,}01296 \end{cases}$$

Возвращаясь к показательной функции, имеем

$$a_0 = e^{b_0} = 12{,}28;\ a_1 = b_1 = -0{,}01296;\ y = 12{,}28\cdot e^{-0{,}01296}.$$

Значения линейной функции: $y_л = -0{,}074x + 10{,}88$; квадратичной функции: $y_{кв} = 9{,}865714721 + 0{,}007142857x - 0{,}000811429x^2$; показательной функции: $y_п = 12{,}28\cdot e^{-0{,}01296x}$ и их отклонения от табличных значений функции в заданных точках сведём в табл. (3.18).

Таблица 3.18

x	0	25	50	75	100
y	10	9,1	8,7	5,6	2,5
$y_л - y$	0,88	-0,07	-1,52	-0,27	0,98
$y_{кв} - y$	-0,13	0,44	-0,51	0,24	-0,03
$y_n - y$	2,28	-0,22	-2,28	-0,95	0,86

На основании таблицы (3.18) вычисляется сумма квадратов отклонений аппроксимации для каждого из трёх рассмотренных видов приближения:

$$\delta_л = 0{,}88^2 + (-0{,}77)^2 + (-1{,}52)^2 + (-0{,}27)^2 + 0{,}98^2 = 4{,}123,$$

$$\delta_{кв} = (-0{,}13)^2 + 0{,}44^2 + (-0{,}51)^2 + 0{,}24^2 + (-0{,}03)^2 = 0{,}5291,$$

$$\delta_n = 2{,}28^2 + (-0{,}22)^2 + (-2{,}28)^2 + (-0{,}95)^2 + 0{,}86^2 = 12{,}087.$$

Следовательно, для заданной табличной функции наиболее целесообразна квадратичная аппроксимация.

3.5. Расчетные задания

3.5.1. Задание 22

В задачах 1 – 30 для вариационных рядов найти доверительные интервалы для среднего и дисперсии. Вычислить доверительную вероятность при заданном коэффициенте значимости α. Построить гистограмму.

Вариант 1	$\alpha = 0{,}03$						
I_i	31-33	33-35	35-37	37-39	39-41	41-43	43-45
m_i	7	11	31	33	28	19	8

Вариант 2	$\alpha = 0{,}07$						
I_i	11-14	I_i	11-14	I_i	11-14	I_i	11-14
m_i	1	m_i	1	m_i	1	m_i	1

Вариант 3	$\alpha = 0{,}06$						
I_i	1-4	I_i	1-4	I_i	1-4	I_i	1-4
m_i	6	m_i	6	m_i	6	m_i	6

Вариант 4	$\alpha = 0{,}01$						
I_i	24-28	I_i	24-28	I_i	24-28	I_i	24-28
m_i	9	m_i	9	m_i	9	m_i	9

Вариант 5	α = 0,02						
I_i	31-35	I_i	31-35	I_i	31-35	I_i	31-35
m_i	4	m_i	4	m_i	4	m_i	4

Вариант 6	α = 0,02						
I_i	1-6	I_i	1-6	I_i	1-6	I_i	1-6
m_i	10	m_i	10	m_i	10	m_i	10

Вариант 7	α = 0,08						
I_i	8-10	I_i	8-10	I_i	8-10	I_i	8-10
m_i	8	m_i	8	m_i	8	m_i	8

Вариант 8	α = 0,06						
I_i	16-20	I_i	16-20	I_i	16-20	I_i	16-20
m_i	9	m_i	9	m_i	9	m_i	9

Вариант 9	α = 0,05						
I_i	19-23	23-27	27-31	31-35	35-39	39-43	43-47
m_i	3	10	30	35	20	13	5

Вариант 10	α = 0,02						
I_i	4-9	I_i	4-9	I_i	4-9	I_i	4-9
m_i	8	m_i	8	m_i	8	m_i	8

Вариант 11	α = 0,04						
I_i	30-33	I_i	30-33	I_i	30-33	I_i	30-33
m_i	11	m_i	11	m_i	11	m_i	11

Вариант 12	α = 0,01						
I_i	15-19	I_i	15-19	I_i	15-19	I_i	15-19
m_i	1	m_i	1	m_i	1	m_i	1

Вариант 13	α = 0,05						
I_i	20-28	I_i	20-28	I_i	20-28	I_i	20-28
m_i	31	m_i	31	m_i	31	m_i	31

Вариант 14	α = 0,04						
I_i	18-21	I_i	18-21	I_i	18-21	I_i	18-21
m_i	9	m_i	9	m_i	9	m_i	9

Вариант 15	$\alpha = 0{,}06$						
I_i	0-4	I_i	0-4	I_i	0-4	I_i	0-4
m_i	15	m_i	15	m_i	15	m_i	15

Вариант 16	$\alpha = 0{,}02$						
I_i	24-26	I_i	24-26	I_i	24-26	I_i	24-26
m_i	34	m_i	34	m_i	34	m_i	34

Вариант 17	$\alpha = 0{,}01$						
I_i	10-13	I_i	10-13	I_i	10-13	I_i	10-13
m_i	4	m_i	4	m_i	4	m_i	4

Вариант 18	$\alpha = 0{,}05$						
I_i	61-64	I_i	61-64	I_i	61-64	I_i	61-64
m_i	28	m_i	28	m_i	28	m_i	28

Вариант 19	$\alpha = 0{,}08$						
I_i	2-5	I_i	2-5	I_i	2-5	I_i	2-5
m_i	12	m_i	12	m_i	12	m_i	12

Вариант 20	$\alpha = 0{,}05$						
I_i	13-15	I_i	13-15	I_i	13-15	I_i	13-15
m_i	15	m_i	15	m_i	15	m_i	15

Вариант 21	$\alpha = 0{,}01$						
I_i	28-33	I_i	28-33	I_i	28-33	I_i	28-33
m_i	21	m_i	21	m_i	21	m_i	21

Вариант 22	$\alpha = 0{,}01$						
I_i	55-60	I_i	55-60	I_i	55-60	I_i	55-60
m_i	29	m_i	29	m_i	29	m_i	29

Вариант 23	$\alpha = 0{,}02$						
I_i	17-19	I_i	17-19	I_i	17-19	I_i	17-19
m_i	5	m_i	5	m_i	5	m_i	5

Вариант 24	$\alpha = 0,04$						
I_i	30-33	I_i	30-33	I_i	30-33	I_i	30-33
m_i	4	m_i	4	m_i	4	m_i	4

Вариант 25	$\alpha = 0,06$						
I_i	41-45	I_i	41-45	I_i	41-45	I_i	41-45
m_i	12	m_i	12	m_i	12	m_i	12

Вариант 26	$\alpha = 0,04$						
I_i	71-73	I_i	71-73	I_i	71-73	I_i	71-73
m_i	12	m_i	12	m_i	12	m_i	12

Вариант 27	$\alpha = 0,10$						
I_i	8-14	I_i	8-14	I_i	8-14	I_i	8-14
m_i	16	m_i	16	m_i	16	m_i	16

Вариант 28	$\alpha = 0,05$						
I_i	25-28	I_i	25-28	I_i	25-28	I_i	25-28
m_i	10	m_i	10	m_i	10	m_i	10

Вариант 29	$\alpha = 0,02$						
I_i	16-19	I_i	16-19	I_i	16-19	I_i	16-19
m_i	12	m_i	12	m_i	12	m_i	12

Вариант 30	$\alpha = 0,06$						
I_i	37-41	I_i	37-41	I_i	37-41	I_i	37-41
m_i	4	m_i	4	m_i	4	m_i	4

3.5.2. Задание 23

Для приведенных группированных выборок, приняв уровень значимости α=0,05, проверить гипотезу H_0 о том, что они получены из нормально распределенной генеральной совокупности.

На предприятии, где организовано производство проволоки из различных материалов и различного диаметра сечения, были проведены исследования при какой нагрузке происходит разрыв провода того или иного типа. Результаты этих исследований приведены в следующей таблице:

№ варирианта	Материал и диаметр сечения проволоки в мм	Интервалы (кг) Частоты mi					
1	Алюминий d = 0,5	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
		12	36	96	67	19	6
2	Алюминий d = 1	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22
		18	72	158	135	54	13
3	Алюминий d = 2	28-29	29-30	30-31	31-32	32-33	33-34
		20	50	70	34	12	6
4	Алюминий d = 3	40-41	41-42	42-43	43-44	44-45	45-46
		24	72	90	76	40	18
5	Алюминий d =5	50-51	51-52	52-53	53-54	54-55	55-56
		29	42	98	84	70	28
6	Алюминий d =10	80-81	81-82	82-83	83-84	84-85	85-86
		32	64	88	61	24	6
7	Медь d =0,5	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22
		16	80	107	55	11	6
8	Медь d =1	26-28	28-30	30-32	32-34	34-36	36-38
		22	35	79	53	31	10
9	Медь d =2	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52	52-54
		28	88	211	158	106	29
10	Медь d =3	58-60	60-62	62-64	64-66	66-68	68-70
		34	57	96	79	62	22
11	Медь d =5	72-74	74-76	76-78	78-80	80-82	82-84
		40	46	92	86	57	19
12	Медь d =10	86-88	88-90	90-92	92-94	94-96	96-98
		46	69	104	92	23	6
13	Железо d =0,1	16-19	19-22	22-25	25-28	28-31	31-34
		20	67	117	83	50	13
14	Железо d =0,3	36-39	39-42	42-45	45-48	48-51	51-54
		24	40	160	140	120	46
15	Железо d =0,5	56-59	59-62	62-65	65-68	68-71	71-74
		30	80	130	60	40	10
16	Железо d =1	76-79	79-82	82-85	85-88	88-91	91-94
		32	80	96	90	48	14
17	Железо d =2	96-99	99-102	102-105	105-108	108-111	111-114
		36	72	133	115	29	7
18	Железо d =5	198-201	201-204	204-207	207-210	210-213	213-216
		42	105	142	131	95	35
19	Сталь d =0,1	26-30	30-34	34-38	38-42	42-46	46-50
		18	26	30	23	20	13
20	Сталь d =0,3	54-60	60-64	64-68	68-72	72-76	76-80
		28	45	50	39	22	6
21	Сталь d =0,5	84-88	88-92	92-96	96-100	100-104	104-108
		36	36	41	26	8	6
22	Сталь d =1	112-116	116-120	120-124	124-128	128-132	132-136
		42	47	71	71	38	11
23	Сталь d =2	140-144	144-148	148-152	152-156	156-160	160-164
		46	81	115	92	35	11
24	Сталь d =5	218-222	222-226	226-230	230-234	234-238	238-242
		48	86	125	96	67	28

3.5.3. Задание 24

Для случайных величин X и Y, принимающих значение $X = x_i, Y = y_i \left(i = \overline{1, n}\right)$:

1) вычислить коэффициент корреляции;
2) получить уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y;
3) построить прямые регрессии и нанести на график табличные точки $\left(x_i, y_i\right)$.

Вариант 1

X	14	3	11	2	6	5	4	7
Y	2,9	9,7	4,4	4,3	9,2	10,3	1,5	6,3

Вариант 2

X	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	12	13,4	14,7
Y	17,0	16,2	13,3	9,7	9,9	6,2	5,8	5,7

Вариант 3

X	2,6	4,5	6,2	7,7	9,1	11,9	13,3	14,6
Y	17,1	16,3	13,4	9,81	6,1	5,6	6,34	6,75

Вариант 4

X	2,1	4,2	6,3	8,4	8,8	10	12,2	16,8
Y	0,32	1,03	2,56	4,8	8,35	9,56	15,67	18,6

Вариант 5

X	6,8	7,5	5,7	8	4,6	12	14,6	14
Y	8,4	8,3	5,4	7,5	5,7	8,4	9,7	23

Вариант 6

X	10,3	9,8	9,5	7,1	3,9	1,2	1,4	12
Y	1,28	14	11,5	10,2	9	6,9	15,2	8

Вариант 7

X	15,3	18,5	13,2	0,57	14,4	9	8,5	9,3
Y	17,7	16,3	7,8	15,1	16,1	7	13,9	9,6

Вариант 8

X	1,3	2,25	3,1	3,38	4,5	0,6	5,1	5,95	7,3
Y	8,55	8,15	2,65	4,9	3,05	2,8	3,2	3,17	3,4

Вариант 9

X	7,5	1,5	5,5	1	3	7,5	2,5	0,5
Y	1,45	4,85	2,2	7,15	4,6	8,7	5,15	3,2

Вариант 10

X	11,8	7,5	8,2	9,8	11,2	13,5	12,3	5,6
Y	97,4	57,5	69,2	41,1	60,7	56,7	96,4	8,7

Вариант 11

X	82	106	92	85	112	98	103	107
Y	81	163	79	81	61	123	147	100

Вариант 12

X	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Y	0,32	1,02	2,56	4,89	8,35	9,56	14,58	15,67	16,78	18,6

Вариант 13

X	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	12,0	13,4	14,7
Y	17,0	16,2	13,3	9,7	9,9	6,2	5,8	5,7

Вариант 14

X	83	106	92	85	112	98	103	99	104	107
Y	98	112	91	84	117	101	98	103	127	145

Вариант 15

X	87	88	83	106	92	85	112	98	103	99	104
Y	101	139	98	111	104	103	118	102	108	119	129

Вариант 16

X	82	136	72	66	42	113	42	133	153	85
Y	81	163	79	81	61	123	85	147	179	91

Вариант 17

X	14	3	11	2	6	5	1	4	7
Y	2,9	9,7	4,4	14,3	9,2	10,3	15,5	10,4	6,3

Вариант 18

X	1,5	2,3	3,3	3,5	4,7	0,8	5,2	6,2	7,4
Y	8,7	8,2	2,6	5,1	3,0	2,8	3,2	3,4	4,2

Вариант 19

X	8,35	8,74	9,25	9,50	10,24	13,65	14,51	15,25
Y	3,50	1,49	6,40	5,00	7,00	9,50	12,50	9,50

Вариант 20

X	10,50	10,75	10,76	11	11,25	14,5	14,28	16,25
Y	6,00	2,50	5,74	8,50	5,26	8	10	12,0

Вариант 21

X	11,35	11,50	11,65	11,675	12	13,75	16	16,5
Y	9,50	6	6,5	8,5	9	9,5	10	11,3

Вариант 22

X	12,85	13,15	13,25	13,28	13,5	14	14,3	16
Y	9,5	9,2	6,5	10,5	7,5	10	11	15

Вариант 23

X	55	71	53	67	81	75	59	85
Y	20,6	11,6	22,3	11,3	32	12,8	24,8	21

Вариант 24

X	65,8	68,3	72,7	61,6	73,1	71,8	78,61	60
Y	166	115	153	157	149	181	173	120

Вариант 25

X	51	67	84	81	101	71	97	109	51	105
Y	25	30	43	44	57	58	43	46	62	55

Вариант 26

X	66	70	75	80	82	85	99	92	95	98
Y	60	78	65	87	74	70	78	95	88	90

Вариант 27

X	58	55	56	51	61	62	62	65	67	70
Y	17	19	18	17	16	14	12	10	13	10

Вариант 28

X	1,0	1,5	2,0	3	5	7	9	11	13	15
Y	32	28	26	24	23	21	20	19	17	15

Вариант 29

X	0	0,5	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,9	0,95
Y	15	16	24	17	26	30	32	36	40	42

Вариант 30

X	50	41	48	60	46	60	51	42	42	46
Y	38	40	47	51	63	57	50	51	58	50

3.5.4. Задание 25

1. Изобразить заданное поле данных в системе координат (x, y) на плоскости.
2. Выбрать подходящую зависимость y от x среди следующих функций:

$$y = a\ln x + b; \quad y = ae^{x} + b; \quad y = b\,\mathrm{arctg}\,x + a; \quad y = ax^{2} + bx + c.$$

3. Методом наименьших квадратов определить наилучшие параметры зависимости.
4. Сравнить полученную кривую с первоначальным полем данных.

Варианты заданий:. (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., 10$.

1. (0,94; –0,49), (–0,6; –3,16), (0,04; –1,65), (–0,74; –3,33), (0,75; –0,62), (–0,95; –4), (0,05; –2,05), (0,9; –0,52), (–0,36; –2,81), (0,54; –0,85).
2. (0,01; 5,04), (0,03; 5,12), (0,12; 5,54), (0,32; 6,79), (0,38; 7,27), (0,41; 7,54), (0,6; 9,64), (0,65; 10,33), (0,72; 11,44), (0,8; 12,9).
3. (–0,15; –2,15), (–0,04; –1,42), (0,02; –0,88), (0,14; 0,31), (0,22; 1,38), (0,48; 5,34), (0,52; 6,28), (0,6; 8,34), (0,74; 12,36), (0,9; 19,06).
4. (1,94; 1,29), (0,4; 2,25), (1,04; 1,98), (0,26; 2,47), (1,75; 1,44), (0,05; 2,42), (0,95; 1,82), (1,9; 1,31), (0,64; 1,94), (1,54; 1,59).
5. (0,61; 5,34), (0,75; 5,42), (1,87; 6,51), (2,04; 6,75), (2,26; 7,04), (3,5; 9,73), (4,62; 14,03), (5,12; 16,9), (5,4; 18,85), (6,2; 26,1).
6. (0,04; 2,07), (0,05; 2,1), (0,52; 3,72), (0,72; 5,12), (0,81; 6,04), (0,94; 7,53), (1,02; 8,68), (1,12; 10,37), (1,24; 12,92), (1,28; 13,92).
7. (0,94; 5,52), (–0,6; –0,78), (0,04; 0,35), (–0,74; –0,83), (0,75; 3,56), (–0,95; –1,33), (–0,05; –0,05), (0,9; 5,09), (–0,36; –0,63), (0,54; 2,1).
8. (0,01; –17,42), (0,03; –13,02), (0,12; –7,48), (0,32; –3,55), (0,38; –2,87), (0,41; –2,56), (0,6; –1,04), (0,65; –0,72), (0,72; –0,31), (0,8; 0,1).
9. (–0,15; –1,38), (–0,04; –1,08), (0,02; –0,97), (0,14; –0,66), (0,22; –0,38), (0,48; 0,76), (0,52; 1,08), (0,6; 1,52), (0,74; 2,54), (0,9; 4,01).
10. $(1{,}94; 3{,}19)$, $(0{,}4; 1{,}68)$, $(1{,}04; 2{,}88)$, $(0{,}26; 1{,}46)$, $(1{,}75; 3{,}2)$, $(0{,}05; 0{,}61)$, $(0{,}95; 2{,}57)$, $(1{,}9; 3{,}19)$, $(0{,}64; 2{,}02)$, $(1{,}54; 3{,}15)$.
11. (0,61; –0,99), (0,75; –0,18), (1,87; 3,3), (2,04; 3,82), (2,26; 4,24), (3,5; 6,01), (4,62; 7,11), (5,12; 7,5), (5,4; 7,72), (6,2; 8,27).
12. (0,04; –9,2), (0,005; –8,24), (0,52; 1,13), (0,72;, 2,44), (0,81; 2,9), (0,94;3,51), (1,02; 3,84), (1,12; 4,22), (1,24; 4,62), (1,28; 4,75).
13. (0,94; 12,03), (–0,6; –0,48), (0,04; 1,44), (–0,74; –0,6), (0,75; 8,03), (–0,95; –1,18), (–0,05; 0,86), (0,9; 11,18), (–0,36; –0,14), (0,54; 5,04).
14. $(0{,}01; 6{,}95)$, $(0{,}03; 6{,}87)$, $(0{,}12; 6{,}55)$, $(0{,}32; 5{,}85)$, $(0{,}38; 5{,}72)$, $(0{,}41; 5{,}64)$, $(0{,}6; 5{,}22)$, $(0{,}65; 5{,}12)$, $(0{,}72; 4{,}82)$, $(0{,}8; 4{,}68)$.
15. (–0,15; 8,02), (–0,04; 7,42), (0,02; 6,98), (0,14; 6,42), (0,22; 5,9), (0,48; 4,86), (0,52; 4,62), (0,6; 4,34), (0,74; 3,92), (0,9; 3,54).
16. (1,94; 46,16), (0,4; 0,15), (1,04; 6,26), (0,26; –0,36), (1,75; 31,1), (1,75; 31,1), (0,05; –1,38), (0,95; 4,75), (1,9; 42,96), (0,64; 1,47), (1,54; 19,87).

17. $(0{,}61;3{,}16)$, $(0{,}75;2{,}87)$, $(1{,}87;2{,}08)$, $(2{,}04;2{,}04)$, $(2{,}26;2{,}02)(3{,}5;2{,}0)$, $(4{,}62;1{,}98)$, $(5{,}12;1{,}97)$, $(5{,}4;1{,}97)$, $(6{,}2;1{,}96)$.

18. $(0{,}04;9{,}8)$, $(0{,}05;9{,}65)$, $(0{,}52;8{,}25)$, $(0{,}72;8{,}12)$, $(0{,}81;8{,}09)$, $(0{,}94;8{,}05)$, $(1{,}02;8{,}04)$, $(1{,}12;8{,}03)$, $(1{,}24;8{,}01)$, $(1{,}28;8{,}0)$.

19. (–0,15; –4,64), (–0,04; –4,22), (0,02; –3,84), (0,14; –3,28), (0,22; –2,84), (0,48; –1,68), (0,52; –1,54), (0,6; –1,28), (0,74; –0,76), (0,9; –0,32).

20. (0,94; 3,51), (–0,6; 0,84), 0,04; 2,35), (–0,74; 0,67), (0,75; 3,38), (–0,95; 0), (–0,05; 1,95), (0,9; 3,48), (–0,36; 1,19), (0,54; 3,15).

21. $(0{,}01;3{,}02)$, $(0{,}03;3{,}12)$, $(0{,}12;3{,}52)$, $(0{,}32;4{,}45)$, $(0{,}38;4{,}74)$, $(0{,}41;4{,}82)$, $(0{,}6;5{,}64)$, $(0{,}65;5{,}76)$, $(0{,}72;6{,}21)$, $(0{,}8;3{,}26)$.

22.(0,04; –3,85), (0,52; –3,8), (0,52; –1,38), (0,72; –0,09), (0,81; 0,54), (0,94; 1,51), (1,02; 2,15), (1,12; 2,98), (1,24; 4,03, (1,28; 4,38).

23. $(0{,}61;4{,}64)$, $(0{,}75;4{,}92)$, $(1{,}87;6{,}23)$, $(2{,}04;6{,}34)$, $(2{,}26;6{,}46)$, $(3{,}5;6{,}87)$, $(4{,}62;7{,}06)$, $(5{,}12;7{,}12)$, $(5{,}4;7{,}14)$, $(6{,}2;7{,}22)$.

24. $(1{,}94;1{,}12)$, $(0{,}4;1{,}56)$, $(1{,}04;2{,}27)$, $(0{,}26;1{,}4)$, $(1{,}75;1{,}54)$, $(0{,}05;0{,}61)$, $(0{,}95;2{,}04)$, $(1{,}9;1{,}2)$, $(0{,}64;1{,}75)$, $(1{,}54;1{,}87)$.

25. (–0,15; 4,51), (–0,04; 4,82, (0,02; 5,06), (0,14; 5,64), (0,22; 6,06),(0,48; 8,24), (0,52; 8,67), (0,6; 9,53), (0,74; 11,22), (0,9; 13,43).

26. (0,01; –3,92), (0,03; –3,81), (0,12; –3,52), (0,32; –2,74), (0,38; –-2,45), (0,41; –2,36), (0,6; –1,28), (0,65; –1,16), (0,72; –0,76), (0,8; –0,26).

27. (0,94; 1,75), (–0,6; 0,37), (0,04; 1,31), (–0,74; 0,3), (0,75; 1,74), (–0,95; –0,24), (–0,05; 1), (0,9; 1,75), (–0,36; 0,54), (0,54; 1,66).

28. (0,04; –3,89), (0,05; –3,88), (0,52; –2,13), (0,72; –1,01), (0,81; –0,42), (0,94; 0,52), (1,02; 1,15), (1,12; 2,01), (1,24; 3,08), (1,28; 3,45).

29. (0,61; –2,65), (0,75; –2,14), (1,87; 4,85), (2,04;6,35), (2,26; 8,46), (3,5; 24), (4,62; 43,28), (5,12; 53,52), (5,4; 59,71), (6,2; 79,07).

30. (0,94; 2,51), (–0,6; –0,16), (0,04; 1,35), (–0,74; –0,33), (0,75; 2,38), (–0,95; –1), (–0,05; 0,95), (0,9; 2,48), (–0,36; 0,19), (0,54; 2,15).

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е.Гмурман. – М.: Высшее образование, 2008.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа, 1999.
3. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ, 2002.
4. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. - М.: Высш. шк., 2001.
5. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000
6. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.
7. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.]; под ред. С. Н. Федина. – 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.
8. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. А. А. Свешникова. – М.: Наука, 1970.
9. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие. Ч. 2/ П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980.
10. Бородин, А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А.Н. Бородин. – СПб.: Лань, 1999.
11. Фадеева, Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика / Л.Н. Фадеева, А.В. Лебедев. – М.: Эксмо, 2010.
12. Ниворожкина, Л.И. Теория вероятностей и математическая статистика / Л.И. Ниворожкина, З.А. Морозова. – М.: Эксмо, 2008.
13. Расчетные задания по курсу высшей математики для студентов АМФ, ХТФ, МТФ, ФАМ. Ч. 4 / сост.: В.И. Ершов [и др.] ННПИ.– Н.Новгород, 1991.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П. 1

Значения функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000

Окончание табл. П. 1

x	**Φ(*x*)**	***x***	**Φ(*x*)**	***x***	**Φ(*x*)**	***x***	**Φ(*x*)**	***x***	**Φ(*x*)**	***x***	**Φ(*x*)**
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760		
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774		
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788		
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801		
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813		
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825		
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836		
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846		
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856		

Таблица П. 2

Значения функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	*x*
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973	0,0
0,1	3970	3965	3901	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918	0,1
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0,2
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	0,3
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0,4
0,5	3521	3503	3155	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352	0,5
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	0,6
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0,7
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	0,8
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0,9
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203	1,0
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1,1
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1,2
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1,3
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1,4
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127	1,5

Окончание табл. П. 2

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	*x*
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	1,6
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	1,7
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669	1,8
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1,9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449	2,0
2,1	0440	0131	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363	2,1
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2,2
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229	2,3
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	2,4
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139	2,5
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	2,6
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2,7
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2,8
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2,9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034	3,0
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	3,1
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3,2
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013	3,3
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3,4
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006	3,5
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3,6
3,7	0004	0004	0004	0004	0001	0004	0003	0003	0003	0003	3,7
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	3,8
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	3,9
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*x*

Таблица П. 3

Значения критерия Стьюдента (*t*-критерия)

f **число степеней свободы.**	*p* – доверительная вероятность							
	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995	0.998	0.999
1	3.0770	6.3130	12.7060	31.820	63.656	127.656	318.306	636.619
2	1.8850	2.9200	4.3020	6.964	9.924	14.089	22.327	31.599
3	1.6377	2.35340	3.182	4.540	5.840	7.458	10.214	12.924
4	1.5332	2.13180	2.776	3.746	4.604	5.597	7.173	8.610
5	1.4759	2.01500	2.570	3.649	4.0321	4.773	5.893	6.863
6	1.4390	1.943	2.4460	3.1420	3.7070	4.316	5.2070	5.958
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.998	3.4995	4.2293	4.785	5.4079
8	1.3968	1.8596	2.3060	2.8965	3.3554	3.832	4.5008	5.0413

9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6897	4.2968	4.780
10	1.3720	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.1437	4.5869
11	1.363	1.795	2.201	2.718	3.105	3.496	4.024	4.437
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0845	3.4284	3.929	4.178
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.1123	3.3725	3.852	4.220
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.976	3.3257	3.787	4.140
15	1.3406	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.732	4.072
16	1.3360	1.7450	2.1190	2.5830	2.9200	3.2520	3.6860	4.0150
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5668	2.8982	3.2224	3.6458	3.965
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5514	2.8784	3.1966	3.6105	3.9216
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.1737	3.5794	3.8834
20	1.3253	1.7247	2.08600	2.5280	2.8453	3.1534	3.5518	3.8495
21	1.3230	1.7200	2.2.0790	2.5170	2.8310	3.1350	3.5270	3.8190
22	1.3212	1.7117	2.0739	2.5083	2.8188	3.1188	3.5050	3.7921
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.1040	3.4850	3.7676
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.0905	3.4668	3.7454
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.0782	3.4502	3.7251
26	1.315	1.705	2.059	2.478	2.778	3.0660	3.4360	3.7060
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.0565	3.4210	3.6896
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.0469	3.4082	3.6739
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.0360	3.3962	3.8494
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.0298	3.3852	3.6460
32	1.3080	1.6930	2.0360	2.4480	2.7380	3.0140	3.3650	3.6210
34	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.9520	3.3479	3.6007
36	1.3050	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195	9.490	3.3326	3.5821
38	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116	3.9808	3.3190	3.5657
40	1.303	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.9712	3.3069	3.5510
42	1.320	1.682	2.018	2.418	2.6980	2.6930	3.2960	3.5370
44	1.301	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923	3.9555	3.2861	3.5258
46	1.300	1.6767	2.0129	2.4102	2.6870	3.9488	3.2771	3.5150
48	1.299	1.6772	2.0106	2.4056	2.6822	3.9426	3.2689	3.5051
50	1.298	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.9370	3.2614	3.4060
55	1.2997	1.673	2.0040	2.3960	2.6680	2.9240	3.2560	3.4760
60	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.9146	3.2317	3.4602

65	1.2947	1.6686	1.997	2.3851	2.6536	3.9060	3.2204	3.4466
70	1.2938	1.6689	1.9944	2.3808	2.6479	3.8987	3.2108	3.4350
80	1.2820	1.6640	1.9900	2.3730	2.6380	2.8870	3.1950	3.4160
90	1.2910	1.6620	1.9867	2.3885	2.6316	2.8779	3.1833	3.4019
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	2.8707	3.1737	3.3905
120	1.2888	1.6577	1.9719	2.3578	2.6174	2.8598	3.1595	3.3735
150	1.2872	1.6551	1.9759	2.3515	2.6090	2.8482	3.1455	3.3566
200	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	2.8385	3.1315	3.3398
250	1.2849	1.6510	1.9695	2.3414	2.5966	2.8222	3.1232	3.3299
300	1.2844	1.6499	1.9679	2.3388	2.5923	2.8279	3.1176	3.3233
400	1.2837	1.6487	1.9659	2.3357	2.5882	2.8227	3.1107	3.3150
500	1.2830	1.6470	1.9640	2.3330	2.7850	2.8190	3.1060	3.3100

Таблица П. 4

Значения χ^2 в зависимости от r и p

p / r	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	838	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	0,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16 34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,0	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3

Окончание табл. П. 4

23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	23,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	2,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,19	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

Таблица П. 5

Значения $P(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ **(распределение Пуассона)**

m	$a = 0,1$	$a = 0,2$	$a = 0,3$	$a = 0,4$	$a = 0,5$	$a = 0,6$	$a = 0,7$	$a = 0,8$	$a = 0,9$	
0	0,9018	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5458	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	
m	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$	$a = 6$	$a = 7$	$a = 8$	$a = 9$	$a = 10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Таблица П. 6

Значения экспоненциальной функции e^{-x}

x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ
0,00	1,000	10	0,40	0,670	7	0,80	0,449	4	3,00	0,050	5
0,01	0,990	10	0,41	0,664	7	0,81	0,445	5	3,10	0,045	4
02	980	10	42	657	7	82	440	4	3,20	41	4
03	970	9	43	650	6	83	436	4	3,30	37	4
04	961	10	44	644	6	84	432	5	3,40	33	3
05	951	9	45	638	7	85	427	4	3,50	30	3
06	942	10	46	631	6	86	423	4	3,60	27	2
07	932	9	47	625	6	87	419	4	3,70	25	3
08	923	9	48	619	6	88	415	4	3,80	22	2
09	914	9	49	613	7	89	411	4	3,90	20	2
0,10	0,905	9	0,50	0,606	6	0,90	0,407	4	4,00	0,0183	17
11	896	9	51	600	5	91	403	4	4,10	166	16
12	887	9	52	595	6	92	399	4	4,20	150	14
13	878	9	53	589	6	93	395	4	4,30	136	13
14	869	8	54	583	6	94	391	4	4,40	123	12
15	861	9	55	577	6	95	387	4	4,50	111	10
16	852	8	56	571	6	96	383	4	4,60	101	10
17	844	9	57	565	5	97	379	4	4,70	0,0091	9
18	835	8	58	560	6	98	375	3	4,80	82	8
19	827	8	59	554	5	99	372	4	4,90	74	7
0,20	0,819	8	0,60	0,549	6	1,00	0,368	35	5,00	0,0067	6
21	811	8	61	543	5	1,10	333	31	5,10	61	6
22	803	8	62	538	5	1,20	302	29	5,20	55	5
23	795	8	63	533	6	1,30	273	26	5,30	50	5
24	787	8	64	527	5	1,40	247	24	5,40	45	4
25	779	8	65	522	5	1,50	223	21	5,50	41	4
26	771	8	66	517	5	1,60	202	19	5,60	37	4
27	763	7	67	512	5	1,70	183	18	5,70	33	3
28	756	8	68	507	5	1,80	165	15	5,80	30	3
29	748	7	69	502	5	1,90	150	15	5,90	27	2
0,30	0,741	8	0,70	0,497	5	2,00	0,135	13	6,00	0,0025	3
31	733	7	71	492	5	2,10	122	11	6,10	22	2
32	726	7	72	487	5	2,20	111	11	6,20	20	2
33	719	7	73	482	5	2,30	100	9	6,30	18	1
34	712	7	74	477	5	2,40	0,091	9	6,40	17	2
35	705	7	75	472	4	2,50	82	8	6,50	15	1
36	698	7	76	468	5	2,60	74	7	6,60	14	2
37	691	7	77	463	5	2,70	67	6	6,70	12	1
38	684	7	78	458	4	2,80	61	6	6,80	11	1
39	677	7	79	454	5	2,90	55	5	6,90	10	1
0,40	0,670		0,80	0,449		3,00	0,050		7,00	0,0009	

Таблица П. 7

Значения $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица П. 8

Значения $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,89	0,120	0,162

Ерофеева Лариса Николаевна

Лещева Светлана Викторовна

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Редактор Н.Н. Максимова

Технический редактор Т.П. Новикова

Компьютерная верстка С.А. Зубкова

Подписано в печать 09.06.2014 Формат 60x84 $\frac{1}{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ .л. 9,5.
Уч.-изд. л. 9,0. Тираж 100 экз. Заказ

Нижегородский государственный технический университет им.Р.Е. Алексеева
Типография НГТУ.
Адрес университета и полиграфического предприятия:
603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24