Н.В. Артемьев, С.Н. Митяков, Е.С. Митяков

Модели в инновационной экономике

Нижний Новгород 2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА»

Н.В. Артемьев, С.Н. Митяков, Е.С. Митяков

МОДЕЛИ В ИННОВАЦИОННОЙ ЭКОНОМИКЕ

Рекомендовано ученым советом Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева в качестве учебного пособия для студентов направления «Инноватика»

Нижний Новгород 2022

УДК 681.3
ББК 22.1+32.9

Модели в инновационной экономике учеб. пособие / Н.В. Артемьев, С.Н. Митяков, Е.С. Митяков – Электрон. дан. – Н. Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева, 2022. – 1 электрон. Диск (CD-ROM): зв., цв., 12 см. – Систем. требования: ПК с процессором 486; ОЗУ 8 Мб,; операц. система Windows 95; CD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с экрана. – 200 экз.

Рассмотрены различные виды экономико-математических моделей, подразделенных на классы по ряду признаков (разделы экономики, цели моделирования, учет времени и неопределенности), приводятся примеры постановки задач и алгоритмов решения моделей из различных областей экономики

Пособие может быть использовано для освоения студентами курса «Математические методы и модели в инноватике», обучающимися по направлениям «Инноватика» и «Системный анализ» и курсов «Финансовая математика», и «Методы принятия решений» обучающимися по направлению «Прикладная математика» (профиль «Программирование и системный анализ»).

Рецензенты:
доктор экономических, профессор *И.В. Рыжов;*
доктор экономических наук, доцент *А.М. Губернаторов*

Редактор Т.В. Третьякова
Электронное издание подготовлено ЦДОТ НГТУ им. Р.Е. Алексеева, компьютерная верстка С.А. Зубкова

ISBN 978-5-502-01567-7

Адрес издающей организации:
НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью курса «Модели в инновационной экономике» является освоение студентами современных математических методов и моделей, применяемых в экономических исследованиях. С быстрым ростом в настоящее время объема и значимости экономической информации как важнейшего ресурса использование математических методов анализе экономических процессов дает экономическим субъектам новые конкурентные преимущества.

При построении курса предполагается, что студенты хорошо знакомы с основными разделами высшей математики, а также владеют навыками использования стандартного и проектирования специализированного программного обеспечения. В каждом из разделов приводятся примеры постановки задач и алгоритмов решения моделей из различных областей экономики.

По определению Шеннона «Модель – это представление объекта, системы или идеи в некоторой форме, отличной от самой ценности». В основе моделирования лежит определенная аналогия, соответствие между исследуемым объектом и его моделью. Это позволяет переходить от модели к самому объекту, использовать на нем результаты, полученные с помощью модели. Экономико-математическая модель – математическое описание исследуемого экономического процесса или объекта.

Модель исследуемого объекта включает в себя две группы параметров: известные к моменту построения модели параметры и неизвестные параметры, которые надо определить в процессе решения. Первые называют *экзогенными* (определенными вне модели), а вторые – *эндогенными* (определяемыми внутри модели) параметрами.

Математические модели, используемые в экономике, можно подразделить на классы по ряду признаков: разделы экономики, цели моделирования, учет времени и неопределенности.

Разделы экономики.

Микроэкономические модели описывают поведение отдельных экономических субъектов (например, фирм), а также их взаимодействие в различных экономических условиях.

Макроэкономические модели описывают экономику как единое целое, анализируя и связывая между собой агрегированные экономические показатели (ВНП, уровень цен, занятость, ставку процента и т.д.).

Цели моделирования

Теоретические (описательные) модели базируются на представлении экономического процесса в виде конечных формул (соотношений) и позволяют изучать экономические объекты на основании определенных предпосылок.

Оптимизационные модели включают системы уравнений и неравенств, а также критерий оптимальности (например, максимум прибыли при заданных ограничениях по ресурсам).

Эконометрические модели основаны на статистическом анализе массивов данных. Такие модели чаще носят прикладной характер (например, прогнозирование котировок на валютной).

Учет времени

Статические модели описывают текущее состояние экономики. Примеры: баланс доходов и расходов, модели равновесия на отдельных рынках, межотраслевые модели, модели общего экономического равновесия.

Динамические модели изучают взаимосвязи переменных во времени и обычно используют аппарат дифференциальных и разностных уравнений. Примеры: модели экономических циклов, модели экономического роста, динамические модели инфляции, модели «жизненного цикла изделия» и т.д.

Учет неопределенности

Детерминированные модели предполагают жесткие функциональные связи между переменными.

Стохастические модели допускают наличие случайных воздействий на исследуемый объект и используют аппарат теории вероятности и математической статистики.

1. МОДЕЛИ ФИНАНСОВО-КОММЕРЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

В любых коммерческих операциях финансовые расчеты практически всегда привязываются к конкретным моментам времени (датам). Причем фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм, и поэтому в коммерческих контрактах обязательно фиксируются сроки, даты, периодичность поступления товаров, денежных средств или их выплат. Необходимость учета этого фактора определяется сущностью самого процесса коммерческой деятельности, финансирования и кредитования и связана с постулатом неравноценности денег в разные моменты времени. Этот постулат верен даже при отсутствии инфляции, поскольку в любой момент есть организации или частные лица (заемщики), нуждающиеся в кредитах на тот или иной период и готовые платить за такой заем (ссуду) определенную сумму, называемую процентами.

Постулат неравноценности денег, связанный со временем, ставит под сомнение правомерность бухгалтерских операций суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени поступления денежных средств, особенно при анализе управления коммерческой деятельностью на длительные периоды.

Фактор времени в финансовой сфере учитывается с помощью процентной ставки как отношение суммы процентных денег, выплачиваемой за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды. Интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют периодом начисления. Сумму процентных платежей определяют исходя из размера ссуды, общего ее срока и уровня процентной ставки. Начисление процентов чаще всего производится дискретно, а в некоторых случаях и в виде непрерывных процентов.

1.1. Модели развития операций по схеме простых процентов

В условиях рыночной экономики существуют различные варианты инвестирования. В простейшем случае кредитор и заемщик договариваются о величине кредита P (первоначальная денежная сумма), размере годовой процентной ставки i%, сроке кредита и длительности периода начисления процентов. Математически такая операция может быть представлена в виде сетевой модели простых процентов. По этой модели происходит накопление общей суммы долга S за счет периодического, например, ежегодного, начисления процентных денег I. В соответствии с этим в конце первого года наращенная сумма будет равна:

$$S_1 = P + I;$$

к концу второго года –

$$S_2 = S_1 + I = P + 2I;$$

к концу третьего года –

$$S_3 = S_2 + I = P + 3I;$$

к концу n-го года –

$$S_n = P + nI.$$

В этом случае накопление суммы происходит по схеме простых процентов и образует возрастающую числовую последовательность:

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n,$$

которая представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_0 = S_0$ и разностью прогрессии:

$$d = S_2 - S_1 = I.$$

Таким образом, математической моделью, отображающей изменение капитала по схеме простых процентов, является арифметическая прогрессия, в соответствии с которой любой ее член находится по формуле

$$S_n = a_0 + dn.$$

Процентная сумма определяется по формуле

$$I = P\frac{i\%}{100\%} = Pi,$$

где i – относительная величина годовой ставки ссудного процента:

$$i = \frac{i\%}{100\%}.$$

На этом основании модель накопления капитала по схеме простых процентов принимает вид:

$$S = P + nPI = P(1 + nI).$$

Следует заметить, что параметр n может быть как целым, так и дробным положительным числом

$$n = \frac{t}{K},$$

где t – продолжительность периода начисления процентов в днях; К – количество дней в году.

Тогда приведенную модель можно записать в другом виде:

$$S = P\left(1 + i\frac{t}{K}\right).$$

В зависимости от содержания поставленной задачи, пользуясь этой моделью, можно определять различные показатели операции:

величину первоначальной суммы –

$$P = \frac{S}{1+ni} = \frac{S}{1+i\dfrac{t}{K}};$$

относительную величину процентной ставки –

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \left(\frac{S-P}{P}\right)\frac{K}{t};$$

количество интервалов начисления (лет) –

$$n = \frac{S-P}{iP};$$

период начисления процентов (дней) –

$$t = K\left(\frac{S-P}{Pi}\right);$$

коэффициент наращения по простой процентной ставке –

$$\text{к} = \frac{S}{P} = 1+in.$$

Если на последовательных интервалах начисления процентов n_1, n_2, n_3, ..., n_m, устанавливаются разные ставки процентов i_1, i_2, i_3, ..., i_m, то сумма процентных денег составит в конце первого интервала: $I_1 = Pn_1i_1$; в конце второго интервала: $I_2 = Pn_2i_2$; в конце m-го интервала: $I_m = Pn_mi_m$.

На этом основании можно записать, что за весь срок договора наращенная сумма будет равна:

$$S = P + I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_m = P\left(1+\sum_{j=1}^{m} n_j i_j\right).$$

Следовательно, коэффициент наращения равен:

$$\text{к} = \frac{S}{P} = 1+\sum_{j=1}^{m} n_j i_j\,.$$

Пример 1. Банк 02.07 принял в межбанковский депозит денежные средства в сумме 80000 руб. сроком на 7 дней по ставке 24,9 %. Банк возвращает сумму депозита с начисленными процентами 9.07 в сумме

$$S = P\left(1+i\frac{t}{K}\right) = 80000\left(1+0{,}249\frac{7}{365}\right) = 82382{,}03.$$

Пример 2. Банк 11.08 выдает предприятию кредит в сумме 280000 руб. на 1 месяц по ставке 25 %. Срок возврата кредита и уплаты процентов по нему – 11.09. Требуется найти сумму причитающихся процентов.

В нашем случае искомая величина равна $S - P = i\dfrac{t}{K}$. Поскольку t = 31, K = 365, i = 0,25, то $S - P$ = 5945,21 руб.

1.2. Модели развития операций по схеме сложных процентов

Вопрос сложных процентов является ключевым вопросом в финансовой математике. Сам термин означает, что процент, выплачиваемый по ссуде или вложенному капиталу, присоединяется к основной сумме, в результате чего проценты на каждом интервале начисления выплачиваются и на основную сумму, и на полученные проценты. В этом случае сумма накопленного капитала составит:

к концу первого года –

$$S_1 = P + PI = P(1 + i);$$

к концу второго года –

$$S_2 = S_1 + S_1 i = S_1(1 + i) = P(1 + i)^2;$$

к концу третьего года –

$$S_3 = S_2(1 + i) = P(1 + i)^3;$$

к концу n-го года –

$$S_n = P(1 + i)^n = P\,к,$$

где к – коэффициент наращения; к $= (1 + i)^n$.

Таким образом, накопление капитала по схеме сложных процентов образует возрастающую числовую последовательность:

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \dots, S_n,$$

которая представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом $b_0 = S_0 = P$ и знаменателем $q = 1 + i$. В соответствии с этим можно записать формулу для определения любого ее члена:

$$S_n = b_0 q^n = P(1 + i)^n.$$

Если n – дробное, то приведенную модель наращения по формуле сложных процентов можно записать в другом виде:

$$S = P(1+i)^{t/K}.$$

Пользуясь этой моделью, можно определять различные показатели: величину первоначальной суммы –

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{S}{(1+i)^{t/K}};$$

относительную величину процентной ставки –

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1;$$

количество интервалов начисления (лет) –

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{\ln(1+i)};$$

период начисления процентов (дней) –

$$t = K\frac{\ln \frac{S}{P}}{\ln(1+i)};$$

коэффициент наращения по сложной процентной ставке –

$$\text{к} = (1+i)^n = (1+i)^{t/K}.$$

Если на протяжении всего срока контракта процентная ставка изменяется, то получим другую математическую модель определения наращенной суммы:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ldots(1+i_j)^{n_j}\ldots(1+i_m)^{n_m} = P\prod_{j=1}^{m}(1+i_j)^{n_j}.$$

В этом случае коэффициент наращения

$$\text{к} = \prod_{j=1}^{m}(1+i_j)^{n_j}.$$

Начисление сложных процентов может осуществляться несколько раз в году: по месяцам, кварталам, полугодиям. В таких случаях указывается ставка на периоде, а наращенная сумма находится по формуле:

$$S = P(1 + i_n)^N,$$

где I_n – ставка на периоде начисления; N – количество интервалов начисления в течение срока действия контракта.

В случае, когда начисление сложных процентов осуществляется через равные промежутки времени n, указывается номинальная годовая процентная ставка i, пользуются следующей формулой:

$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn},$$

где m – количество интервалов начисления за год; n – срок контракта в годах.

На практике применяется еще и непрерывное начисление процентов по номинальной годовой процентной ставке i. В этом случае величину наращенной суммы находят из следующего выражения:

$$S = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} = Pe^{in},$$

которое получено, используя известную формулировку второго замечательного предела.

Рассмотрим ситуацию, когда на счет в банке положена исходная сумма, но в конце года к ней добавляется еще некоторая сумма. Предположим, P – исходная сумма, на которую начисляется i % годовых (пусть проценты начисляются раз в год); по прошествии каждого года к ней добавляется еще С ден. ед. Итак, к концу первого года на счете в банке будет сумма

$$S_1 = P(1+i) + C = \left(P + \frac{C}{i}\right)(1+i) - \frac{C}{i};$$

к концу второго года –

$$S_2 = S_1(1+i) + C = \left(\left(P + \frac{C}{i}\right)(1+i) - \frac{C}{i}\right)(1+i) + C = \left(P + \frac{C}{i}\right)(1+i)^2 - \frac{C}{i};$$

к концу n-го года –

$$S_n = \left(P + \frac{C}{i}\right)(1+i)^n - \frac{C}{i}.$$

Аннуитет можно охарактеризовать как несколько равновеликих выплат из первоначальной суммы, производящихся в течение n лет. Суммарные отчисления превышают сумму депозита из-за использования сложных процентов. По завершении выплат наращенная сумма $S_n = 0$. В этом случае, зная размер первоначального вклада P и годовую процентную ставку i, можно определить сумму ежегодных выплат C:

$$C = iP\frac{(1+i)^n}{1-(1+i)^n}.$$

Заметим, что в случае выплат значение C будет отрицательным.

Можно также определить размер суммы P, которую нужно положить на счет в банке, чтобы обеспечить вкладчику определенные поступления C $(C < 0)$ в течение n лет:

$$P = \frac{C}{i}\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}.$$

Наконец, можно найти будущую стоимость аннуитета при условии регулярных платежей (поступлений) в размере C и нулевом начальном вкладе ($P = 0$). В этом случае, наращенная сумма через n лет при начислении процентов один раз в год по ставке i определяется из соотношения:

$$S_n = C\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = C\sum_{j=1}^{n}(1+i)^j.$$

Пример 3. Коммерческие банки С и D начисляют доход один раз в полгода, причем банк C по простой ставке, а банк D по сложной ставке процентов. Через год в этих банках средства инвестора увеличиваются на 60 %. В какой банк выгоднее положить деньги на полгода и в какой – на полтора года?

По условию коэффициенты наращения банков C *и* D равны: κ_C = κ_D *=1,6.*

Для банка C ставка простых процентов определяется из выражения:

$$\kappa = \frac{S}{P} = 1 + in \Rightarrow i = \frac{\kappa - 1}{n} = \frac{1{,}6 - 1}{2} = 0{,}3.$$

Для банка D ставка сложных процентов составляет:

$$\kappa = (1+i)^n \Rightarrow i = \sqrt[n]{\kappa} - 1 = \sqrt{1{,}6} - 1 = 0{,}265.$$

Через полгода наращенная сумма вклада в банке C составит $\kappa_{1C} = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$, а в банке D – $\kappa_{1D} = 1 + 0{,}265 = 1{,}265$. Соответственно, через полтора года $\kappa_{3C} = 1 + 0{,}3 \cdot 3 = 1{,}9$, $\kappa_{3D} = (1 + 0{,}265)^3 = 2{,}024$.

Поэтому при вложении денег на полгода выгоднее использовать банк C, а при вложении на полтора года – банк D.

Пример 4. Вы положили в банк 10 000 дол. Какую сумму Вы получите через два года, если банк будет начислять 12 % годовых: a) ежегодно; b) каждые 6 месяцев; c) ежеквартально; d) ежемесячно.

Используем формулу для нахождения наращенной суммы в модели сложных процентов:

$$S = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}.$$

В нашем случае P = *10000,* n = *2,* i =*0,12,* m_a = *1,* m_b = *2,* m_c = *4,* m_d = *12.* Тогда S_a = *12544;* S_b = *12624,77;* S_c = *12667,7;* S_d = *12697,35.*

Пример 5. Вам необходимо 100 000 дол. для приобретения нового оборудования. Банк предлагает взять кредит в размере 100 000 дол. на три года с возвратом в конце третьего года суммы в 164 300 дол. Какова годовая ставка процента банка для этого кредита, если используется модель сложных процентов с начислением раз в год?

Коэффициент наращения $\kappa = (1+i)^n$*;* n = *3;* κ = *1,643.* Отсюда

$$i = \sqrt[3]{1{,}643} - 1 = 0{,}18.$$

Пример 6. Предположим, вам досталось по наследству 10 000 дол., и вы хотите иметь стабильный в течении ближайших 10 лет доход. Некая страховая компания предлагает такие аннуитеты из расчета 5% годовых. Какова сумма ежегодного дохода?

$$C = iP\frac{(1+i)^n}{1-(1+i)^n} = 0{,}05 \cdot 10000\frac{1{,}05^{10}}{1-1{,}05^{10}} = -1295{,}05.$$

Пример 7. Определить размер суммы, которую нужно положить на счет в банке, чтобы обеспечить вкладчику поступления суммой 5000 дол. в течении 10 лет, если банк выплачивает 8 % годовых.

$$P = \frac{C}{i}\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n} = \frac{-5000}{0{,}08}\frac{1-1{,}08^{10}}{1{,}08^{10}} = 33550.$$

Следовательно, чтобы получать по 5000 дол. ежегодно в течении ближайших 10 лет, нужно положить на счет 33 550 дол.

Пример 8. Вы хотите накопить 10 000 дол. на машину и в состоянии откладывать ежемесячно по 400 дол., вкладывая эти деньги в банк. Через сколько месяцев у Вас будет нужная сумма для покупки автомобиля, если ставка банка 27 % годовых с ежемесячным начислением процентов?

$S_n = C\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$; P = *0;* i = *0,27/12 = 0,025;* S_n = *10000;* C = *400.*

Следовательно, $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S_n i}{C} + 1\right)}{\ln(1+i)} = 20{,}05$ мес.

1.3. Модели операций дисконтирования

При любом типе экономики, где капитал имеет стоимость, доллар сегодня стоит больше доллара, который должен быть получен через год, два, три. Поэтому нам нужны средства идентификации денежных потоков во времени, чтобы определить стоимость денег с учетом доходов будущих периодов. Зная текущую стоимость будущих денежных потоков, мы можем нивелировать разницу во временном распределении денежных потоков.

Допустим, вам совершенно точно известно, что у вас будет возможность получить по 1000 дол. в конце каждого из ближайших двух лет. Если ваши издержки упущенных возможностей составляют 8 % в год, то сколько стоит это предложение сейчас?

Прежде всего следует решить вопрос, какая наличная сумма сегодня превратиться в 1000 дол. по прошествии одного года при 8 % годовых? Находя наращенную сумму *S* в предыдущем разделе, мы умножали исходную сумму *P* на (1 + *i*), где *i* – ставка процента. В данном случае нам известна *S* и ставка процента, и мы можем найти соответствующую начальную стоимость.

$$P_1 = 1000 \text{ дол.}/1{,}08 = 925{,}93 \text{ дол.}$$

Аналогично находим настоящую стоимость 1000 дол., которые должны быть получены по прошествии 2 лет:

$$P_2 = 1000 \text{ дол.}/(1{,}08)^2 = 867{,}34 \text{ дол.}$$

В таких расчетах процентная ставка обычно называется ставкой дисконтирования. Ставка дисконтирования – процентная ставка, используемая для определения текущей стоимости будущих денежных потоков.

Общая формула для расчета текущей стоимости будущего денежного потока при учете дисконтирования один раз в период (год) имеет вид

$$P_n = \frac{S_n}{(1+k)^n},$$

где S_n – будущие денежные потоки; k – ставка дисконтирования; n – количество периодов.

Текущая стоимость денежного потока, представляющего собой аннуитет из ряда равновеликих выплат за определенное число отрезков времени, будет

$$P_n = C\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k(1+k)^n}\right] = C\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+k)^i},$$

где C – платеж (поступление) за период; P_n – текущая стоимость аннуитета; k – ставка дисконтирования за период; n – количество периодов аннуитета.

Если проценты выплачиваются чаще, чем раз в год, формула для расчета текущей стоимости вклада должна быть пересмотрена аналогично тому, как мы это сделали с формулой для наращенной суммы:

$$P_n = \frac{S_n}{\left(1+\dfrac{k}{m}\right)^{mn}},$$

где S_n – поток денежных средств по прошествии n лет; m – число начислений процентов в год; k – ставка дисконтирования.

Пример 9. Допустим, через 3 года мы должны получить 100 дол., ставка дисконтирования равна 10 %, проценты начисляются ежеквартально. Тогда

$$P = 100 \text{ дол.}/(1 + 0{,}1/4)12 = 74{,}36 \text{ дол.}$$

С другой стороны, если начисление производиться раз в полгода, то

$$P = 100 \text{ дол.}/(1 + 0{,}1/2)6 = 74{,}62 \text{ дол.}$$

Таким образом, чем реже начисление процентов, тем больше текущая стоимость, т.е. взаимосвязь обратная той, которая существует для будущей стоимости.

Когда проценты начисляются непрерывно, текущая стоимость денежного потока по прошествии *n* лет равна

$$P_n = \frac{S_n}{e^{kn}}.$$

Пример 10. Текущая стоимость 1000 дол., которые должны быть получены через 10 лет при норме непрерывно начисляемого дисконта 20 %, будет равна

$$P_{10} = \frac{1000}{e^{0,2\cdot 10}} = 135,34 \text{ дол.}$$

1.4. Модели операций с ценными бумагами

Ценные бумаги с фиксированным уровнем дохода – это те, которые обеспечивают инвестору получение ранее установленной суммы при каждом погашении их эмитентом.

Облигация – обязательство выплачивать установленный процентный доход на протяжении определенного периода, по истечении которого владельцу облигации выплачивается ее номинальная стоимость.

Текущая (дисконтированная) стоимость потока платежей по облигации вычисляется по формуле

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+k)^i} + \frac{H}{(1+k)^n}.$$

где C – годовые процентные выплаты, H – номинальная стоимость, k – доход по облигации.

Пример 11. Определить рыночную цену, которая обеспечит получение 14 % дохода по облигации с номинальным доходом 12 % и оставшимся сроком до погашения – 10 лет. Номинал H = 1000 дол.

Поскольку номинальный процентный доход равен 12%, C = 120 дол. Тогда

$$P = \frac{120}{1.14} + \frac{120}{(1{,}14)^2} + \ldots + \frac{120}{(1{,}14)^{10}} + \frac{1000}{(1{,}14)^{10}} = 895{,}7 \text{ дол.}$$

Иными словами, стоимость облигации просто равна сумме дисконтированной стоимости потока бушующих процентных выплат, плюс дисконтированная стоимость выплаты номинала при наступлении срока погашения облигации.

Пример 12. Вы собираетесь приобрести 10-летнюю облигацию с купонной ставкой 12% годовых и номиналом в 1000 дол. За какую сумму Вы готовы приобрести эту облигацию, если требуемая доходность составляет: a) 14%; b) 12%; c) 10%?

Используя выражение для рыночной цены облигации, получим: P_a = *895,7 дол.;* P_b = *1000 дол.;* P_c = *1122,9.*

Следовательно, чем ниже требуемая доходность, тем выше текущая стоимость облигации.

Привилегированная акция – ценная бумага с фиксированным уровнем дохода. Доход определяется объемом дивиденда, который должен выплачиваться через равномерные промежутки времени.

Для расчета текущей стоимости акций можно использовать понятие бессрочной ренты (в этом случае предполагается бесконечный поток платежей).

В случае перпетьюитета (бессрочной ренты) текущая стоимость денежных потоков вычисляется по формуле

$$P = \frac{C}{k},$$

где C – платеж (поступление) за период; k – ставка процента за период.

В случае постоянного роста предполагается периодическое увеличение (уменьшение) процентного дохода. Тогда

$$P = \frac{C_1}{k - g},$$

где C_1 – платеж (поступление) за первый период; P – текущая стоимость денежных потоков; k – ставка процента за период; g – темп роста платежей (поступлений).

Пример 13. Вы собираетесь приобрести привилегированную акцию, номинал которой 100 дол., купонная ставка 9 %. За какую цену Вы готовы ее приобрести, если требуемая Вами норма доходности составляет 14 %?

Сумма ежегодных платежей определяется произведением номинала на купонную ставку: C = 100·0,09 = 9 дол.

$$P = \frac{C}{k} = \frac{9}{0{,}14} = 64{,}286\ \textit{дол.}$$

Пример 14. Вы собираетесь приобрести обыкновенную акцию компании С, по которым был выплачен дивиденд в размере 4 дол. При этом ожидается, что дивиденды будут выплачиваться с ежегодным темпом прироста в 6 %. За какую сумму Вы готовы приобрести акции, если требуемая Вами норма доходности составляет 14 %?

$$P = \frac{C_1}{k - g};\ C_1 = 4;\ k = 0{,}14;\ g = 0{,}06 \Rightarrow P = 50\ \textit{дол.}$$

2. МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИОННОГО АНАЛИЗА

Под *инвестициями* понимают денежные средства, целевые банковские вклады, паи, акции и другие ценные бумаги, технологии, машины, оборудование, лицензии, в том числе и на товарные знаки, кредиты, любое другое имущество или имущественные права, интеллектуальные ценности, вкладываемые в объекты предпринимательской деятельности в целях получения доходов (прибыли) и достижения положительного социального эффекта.

Инвестиционная деятельность представляет собой вложения инвестиций (инвестирование) и совокупность практических действий по реализации инвестиций. В мировой практике различают следующие виды инвестиций:

- реальные (прямые) – вложения капитала непосредственно в средства производства;
- финансовые – вложения в ценные бумаги, а также помещение капитала в банки;
- интеллектуальные – покупка патентов, лицензий, ноу-хау, подготовка и переподготовка персонала.

Инвестиции – протяженный во времени процесс. Это диктует необходимость при анализе инвестиционных проектов учитывать:

- **рискованность проектов**, так как чем больше срок окупаемости, тем рискованнее проект;
- **временную стоимость денег**, так как с течением времени деньги изменяют свою ценность;
- **привлекательность проектов** по сравнению с альтернативными возможностями вложения средств с точки зрения максимизации доходов и имущества акционеров предприятия при приемлемой степени риска.

Анализ эффективности инвестиционных проектов заключается в оценке и сравнении эффективности альтернативных инвестиционных проектов. В качестве измерителей здесь применяют формальные характеристики, основанные на дисконтировании потоков ожидаемых поступлений и расходов. Наиболее важным моментом инвестиционного анализа является выбор уровня *ставки процента*, по которой проводится дисконтирование. Какую ставку принять в конкретной ситуации - дело экономического суждения и прогноза. Чем она выше, тем в большей степени отражается фактор времени. При выборе ставки процента ориентируются на существующий или ожидаемый усредненный уровень ссудного процента. Важным моментом при определении процентной ставки, применяемой для дисконтирования, является учет риска.

2.1. Модели анализа эффективности капиталовложений

Одна из главных задач экономического анализа – расчет будущих денежных потоков, необходимых для осуществления проекта.

Собрав необходимую информацию, можно оценить привлекательность различных инвестиционных проектов. Решение состоит в том, чтобы либо принять, либо отвергнуть его. Для оценки анализа эффективности капиталовложений существуют следующие методы:

- окупаемости;
- внутренней нормы доходности;
- чистой текущей стоимости;
- индекса доходности.

Метод окупаемости

Период окупаемости инвестиционного проекта (Payback Period – PBP) – это число лет, необходимых для возмещения стартовых инвестиционных расходов. Он равен отношению исходных фиксированных расходов к годовому притоку наличности за период возмещения.

Пример 1. Пусть чистые инвестиции составляют 18 000 дол., а годовой приток наличности равен 5700 дол. и не меняется из года в год, то период окупаемости

$$PBP = 18\,000/5700 = 3{,}16 \text{ лет.}$$

Если рассчитанный период окупаемости меньше периода планирования проекта, то проект принимается, если нет – отвергается. Основной недостаток метода окупаемости в том, что не растет величина денежных потоков после срока окупаемости, следовательно, при помощи данного метода нельзя измерить рентабельность. Кроме того, при этом методе не принимается во внимание величина и направления распределения денежных потоков на протяжении периода окупаемости: рассматривается только период покрытия расходов в целом. Тем не менее, данный метод позволяет дать грубую оценку ликвидности проекта.

Более точный метод расчета периода окупаемости – графический. Если по оси абсцисс отложить время, а по оси ординат – кумулятивный денежный поток (накопительным итогом по годам), то точка пересечения кривой с осью абсцисс точно определяет период окупаемости PBP. В данном случае можно определить и период окупаемости с учетом дисконтирования денежных потоков (Discounted Payback Period – DPBP). Он определяется аналогично графическим методом, однако по оси ординат в этом случае откладывается дисконтированный денежный поток накопительным итогом.

Метод чистой текущей стоимости

Чистая текущая стоимость (Net Present Value – NPV) – текущая стоимость денежных потоков за вычетом текущей стоимости денежных оттоков. В этом методе все денежные потоки дисконтируют до получения текущей стоимости, используя необходимую норму прибыли k. Чистая текущая стоимость инвестиционного проекта при этом равна

$$NPV = -X_0 + \frac{X_1}{(1+k)} + \frac{X_2}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{X_n}{(1+k)^n}.$$

Если сумма величин этих дисконтированных потоков равна нулю или больше, предложение принимается, если нет – отклоняется.

Пример 2. Пусть чистые инвестиции составляют 18 000 дол., а годовой приток наличности равен 5700 дол. и не меняется из года в год (пример 1). Кроме того, пусть необходимая норма прибыли после налогообложения равна 12 %. Тогда в нашем случае

$$NPV = -18\,000 + \frac{5700}{1{,}12} + \frac{5700}{(1{,}12)^2} + \frac{5700}{(1{,}12)^3} + \frac{5700}{(1{,}12)^4} + \frac{5700}{(1{,}12)^5} = -18\,000 + 20\,547 = 2547.$$

Так как чистая текущая стоимость этого проекта больше нуля, то проект должен быть принят.

Метод внутренней нормы доходности

Внутренняя норма доходности (Internal Rate of Return – IRR) – коэффициент дисконтирования, который уравновешивает текущую стоимость притоков денежных средств и текущую стоимость их оттоков, образовавшихся в результате реализации инвестиционного проекта. Если стартовые затраты приходятся на время нуль, то внутреннюю норму прибыли r можно найти из следующего выражения:

$$X_0 = \frac{X_1}{(1+r)} + \frac{X_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{X_n}{(1+r)^n},$$

где X_0 – текущая стоимость стартовых затрат; X_i – будущие денежные потоки.

Другими словами, IRR проекта представляет собой ту ставку дисконтирования, при которой чистая текущая стоимость (NPV) равна нулю (все затраты, учитывая временную стоимость денег, окупаются).

Пример 3. Пусть чистые инвестиции составляют 18 000 дол., а годовой приток наличности равен 5700 дол. и не меняется из года в год (пример 1). В нашем примере это может быть выражено следующим образом:

$$18\,000 = \frac{5700}{1+r} + \frac{5700}{(1+r)^2} + \frac{5700}{(1+r)^3} + \frac{5700}{(1+r)^4} + \frac{5700}{(1+r)^5}.$$

Для определения IRR графическим методом необходимо:

1. Задать некую ставку дисконтирования и определить NPV проекта. Отметить соответствующую точку на графике (по оси ординат – IRR, по оси абсцисс – NPV);

2. Задать гораздо большую ставку дисконтирования (тогда NPV резко уменьшиться), вычислить NPV и отметить соответствующую точку на графике;

3. Соединить данные две точки и, если необходимо, продлить кривую NPV до пересечения с осью IRR. В точке пересечения кривой NPV с осью IRR чистая текущая стоимость проекта равна нулю.

Этот метод дает возможность учесть как величину, так и распределение во времени ожидаемых денежных потоков в каждом периоде реализации проекта. Для принятия решения об эффективности проекта необходимо, чтобы внутренняя норма доходности проекта была не меньше стоимости капитала.

Метод индекса доходности

Индекс доходности (Profitability Index – PI) рассчитывается по формуле

$$PI = \frac{NPV}{I} + 1,$$

где NPV – чистая текущая стоимость проекта; I – инвестиции по проекту ($I = -X_0$).

Каждый из методов анализа инвестиционных проектов дает финансовому менеджеру возможность рассмотреть индивидуальные характеристики проекта, выделить важные нюансы и подробности, поэтому опытные специалисты комплексно применяют все основные методы к анализу каждого из проектов.

Учет риска

При выборе инвестиционных проектов необходимо учитывать влияние инфляции и рисков. Инфляция изменяет реальную стоимость поступлений и затрат, причем далеко не всегда в равной пропорции. Поэтому приходится предварительно корректировать положительный и отрицательный денежные потоки по уровню инфляции, а затем уже очищать номинальный денежный поток от влияния инфляции и получать чистый реальный денежный поток.

Разные инвестиционные проекты имеют различную степень риска. Кажущийся высокодоходный проект может стать настолько рискованным, что его реализация приведет к значительному увеличению явного риска фирмы.

В общем случае рискованность инвестиционного проекта можно определить как отклонение потока денежных средств для данного проекта от ожидаемого. Чем больше отклонение, тем проект считается более рискованным. Общепринятой мерой вариации является *стандартное отклонение* (СКО):

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 P_i}\,,$$

где X_i – денежный поток для i-й вероятности; P_i – вероятность появления этого денежного потока; $\overline{X}$ – *математическое ожидание* денежного потока, определяемое формулой

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i\,.$$

Пример 4. Рассмотрим два инвестиционных проекта, имеющих различные прогнозируемые величины денежных потоков. Допустим также, что прогнозы составляются для следующих состояний экономики: нормальное, глубокий спад, средний спад, небольшой подъем, наибольший подъем. Для каждого из этих состояний необходимо знать вероятность появления. Обладая данной информацией, можно представить вероятность распределения возможных потоков денежных средств для предложений А и В (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Предложение *A*, дол.		**Предложение *B*, дол.**	
Вероятность	Движение денежных средств	Вероятность	Движение денежных средств
0,1	3000	0,1	2000
0,2	3500	0,2	3000
0,4	4000	0,4	4000
0,2	4500	0,2	5000
0,1	5000	0,1	6000

Математическое ожидание денежного потока для предложения A:

$$\overline{X_A} = 0{,}1 \cdot 3000 + 0{,}2 \cdot 3500 + 0{,}4 \cdot 4000 + 0{,}2 \cdot 4500 + 0{,}1 \cdot 5000 = 4000 \text{ дол.}$$

Для варианта B результат будет тот же:

$$\overline{X_B} = 0{,}1 \cdot 2000 + 0{,}2 \cdot 3000 + 0{,}4 \cdot 4000 + 0{,}2 \cdot 5000 + 0{,}1 \cdot 6000 = 4000 \text{ дол.}$$

Стандартное отклонение для варианта A:

$$\sigma_A = [0{,}1(3000-4000)^2 + 0{,}2(3500-4000)^2 + 0{,}4(4000-4000)^2 +$$
$$+ 0{,}2(4500-4000)^2 + 0{,}1(5000-4000)^2]^{1/2} = \sqrt{300\,000} = 548 \text{ дол.}$$

Стандартное отклонение для предложения B:

$$\sigma_B = [0{,}1(2000-4000)^2 + 0{,}2(3000-4000)^2 + 0{,}4(4000-4000)^2 +$$
$$+ 0{,}2(5000-4000)^2 + 0{,}1(6000-4000)^2]^{1/2} = \sqrt{1\,200\,000} = 1095 \text{ дол.}$$

Таким образом, вариант *B* имеет более высокое стандартное отклонение, характеризующее большую дисперсию возможных результатов, и можно сказать, что он более рисковый.

Относительным показателем степени риска проекта является коэффициент вариации, определяемый отношением стандартного отклонения и математического ожидания денежного потока. При прочих равных условиях предпочтение отдается проекту, имеющему меньший коэффициент вариации. Для предложения *A* коэффициент вариации равен $CV_A = 548/4000 = 0{,}14$, для предложения *B* – $CV_B = 1095/4000 = 0{,}27$.

Дерево вероятностей

Необходимо помнить, что степень риска для потоков денежных средств может меняться со временем. Это может быть связано, например, с изменением состояния экономики в целом за время осуществления проекта. Одним из методов, направленных на решение данной проблемы, является использование дерева вероятностей.

Пример 5. Предположим, что мы анализировали инвестиции в проект стоимостью 240 у.е. в период 0, которые, как ожидалось, вызовут возможные потоки денежных средств, показанные в таблице 2.2.

Таблица 2.2.

Период 1		Период 2		
Исходная вероятность P(1)	Чистые потоки денежных средств	Условная вероятность P(2/1)	Чистые потоки денежных средств	Совместная вероятность P(1,2)
0,25	-100	0,4	-400	0,1
		0,4	-100	0,1
		0,2	200	0,05
0,5	200	0,2	-100	0,1
		0,6	200	0,3
		0,2	500	0,1
0,25	500	0,2	200	0,05
		0,4	500	0,1
		0,4	0,4	0,1

Зная потоки денежных средств -100 у.е. в периоде 1, при вероятности 0,4, можно сказать, что потоки во втором периоде составят -400 у.е. и -100 у.е., а при вероятности 0,2 – 200 у.е.. Совместная вероятность потоков денежных средств (-100 у.е.) в первом периоде и потоков денежных средств (-400 у.е.) во втором периоде равна произведению исходной и условной вероятности 0,25·0,4 = 0,1. Аналогично можно вычислить совместные вероятности для остальных ветвей дерева.

Математическое ожидание вероятностного распределения возможных чистых текущих стоимостей в нашем случае равно

$$\overline{NPV} = -240 + \sum_{i=1}^{n} NPV_i P_i ,$$

где NPV_i – чистая текущая стоимость для серии i потоков денежных средств за все периоды; P_i – вероятность появления этой серии; n = 9 – общее число серий потоков денежных средств.

Стандартное отклонение вероятностного распределения возможных чистых текущих стоимостей может быть определено по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (NPV_i - \overline{NPV})^2 P_i} .$$

Расчеты для нашего примера дают $\overline{NPV}$ = 116 у.е., σ = 444 у.е..

Математическое ожидание и стандартное отклонение вероятностного распределения возможных чистых текущих стоимостей, определенные при помощи дерева вероятности, дают значительных объем информации, необходимой для оценки риска инвестиционного проекта. Если вероятностное распределение близко к нормальному, можно рассчитать вероятность того, что чистая текущая стоимость будет меньше нуля. Разница между нулем и математическим ожиданием чистой текущей стоимостью проекта в нашем примере равна -116 у.е. Разделив эту разницу на стандартное отклонение возможных чистых текущих стоимостей, получим -116 / 444 = -0,26. Это говорит о том, что нулевая чистая текущая стоимость находится на расстоянии 0,26 стандартного отклонения левее от математического ожидания вероятностного распределения возможных чистых текущих стоимостей. Обратившись к таблице нормального распределения, можно найти, что существует приблизительно 40% вероятность того, что чистая текущая стоимость будет меньше нуля. Следовательно, с вероятностью 60% чистая текущая стоимость проекта будет больше нуля. На основании этих данных может быть принято решение о приемлемости или не приемлемости данного проекта.

2.2. Методы портфельного анализа финансовых инвестиций

Если инвестор имеет возможность вложить свои средства не в один, а в несколько проектов одновременно, то для принятия оптимального решения ему необходимо использовать аппарат портфельного анализа. Портфель предполагает наличие нескольких инвестиционных проектов. Использование портфеля в большинстве случаев позволяет инвестору уменьшить риск и (или) увеличить доходность инвестиций. Наиболее развит аппарат портфельного анализа применительно к финансовым инвестициям. В этом случае портфель (portfolio) – объединение двух или более ценных бумаг. Портфельный анализ также может быть применен и к проектам капиталовложений.

В 1952 г. Гарри Марковиц опубликовал фундаментальную работу, которая является основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования портфеля. Подход Марковица начинается с предположения, что инвестор в настоящий момент времени имеет конкретную сумму денег для инвестирования. Эти деньги будут инвестированы на определенный промежуток времени, называемый периодом владения (holding period). В конце периода владения инвестор продает ценные бумаги, купленные в начале периода, после чего либо использует полученный доход на потребление, либо реинвестирует его в другие ценные бумаги (либо делает и то и другое одновременно). Таким образом, подход Марковица может быть рассмотрен как дискретный подход. В момент $t = 0$ инвестор должен принять решение о покупке конкретных ценных бумаг, которые будут находиться в его портфеле до момента $t = 1$. Поскольку портфель представляет собой набор различных ценных бумаг, это решение эквивалентно выбору оптимального портфеля из набора возможных портфелей.

В момент принятия решения доходность портфеля в предстоящий период владения неизвестна. Однако инвестор, основываясь на некоторых предположениях, может оценить ожидаемую доходность (expected returns) различных ценных бумаг. Марковец отмечает, что инвестировать средства в бумагу с наибольшей ожидаемой доходностью в общем случае не разумно. Типичный инвестор, хотя и желает чтобы «доходность была высокая», но одновременно хочет, чтобы «доходность была настолько определенной, насколько это возможно». Это означает, что инвестор, стремясь одновременно максимизировать ожидаемую доходность и минимизировать неопределенность (т. е. риск (risk)), имеет две противоречащие друг другу цели, которые должны быть сбалансированы в момент принятия решения.

Поскольку портфель представляет собой совокупность различных ценных бумаг, его доходность может быть вычислена по формуле

$$r_p = \frac{W_1 - W_0}{W_0},$$

где W_0 – совокупная цена покупки всех ценных бумаг, входящих в портфель в момент $t = 0$; W_1 – совокупная рыночная стоимость этих ценных бумаг в момент $t = 1$ плюс совокупный денежный доход от обладания данными ценными бумагами в период владения. Величина r_p – является случайной переменной и характеризуется ожидаемым (средним) значением (expected value) $\overline{r_p}$ и стандартным отклонением (standard deviation) σ_p.

Метод, примененный для выбора наиболее желательного портфеля, использует так называемые кривые безразличия (indifference curves). Эти кривые отражают отношение инвестора к риску и доходности. Они могут быть представлены как двухмерный график, где по горизонтальной оси откладывается риск, мерой которого является стандартное отклонение σ_p, а по вертикальной – вознаграждение, мерой которого является ожидаемая доходность $\overline{r_p}$ (рис. 2.1).

Отметим два основных свойства семейства кривых безразличия:

- все портфели, лежащие на одной заданной кривой безразличия, являются равноценными для инвестора;
- инвестор будет считать любой портфель, лежащий на кривой безразличия, которая находится выше и левее, более привлекательным, чем любой портфель, лежащий на кривой безразличия, которая находится ниже и правее.

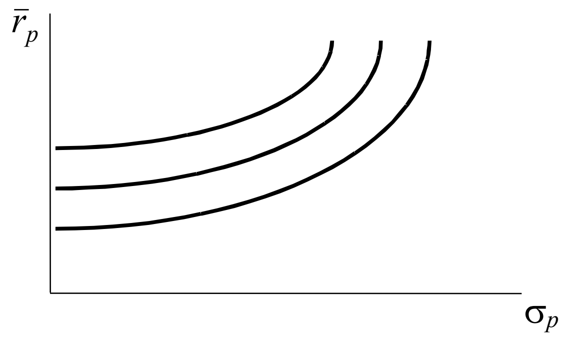


Рис. 2.1. Кривые безразличия инвестора

Можно предположить, что степень уклонения от риска не одинакова у различных инвесторов. Чем больше наклон семейства кривых безразличия, тем выше степень избежания инвестором риска.

Ожидаемая доходность портфеля, состоящая из N ценных бумаг,

$$\overline{r_p} = \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{r_i} = X_1 \overline{r_1} + X_2 \overline{r_2} + \ldots + X_N \overline{r_N},$$

где X_i – доля начальной стоимости портфеля, инвестированная в ценную бумагу i; $\overline{r_i}$ – ожидаемая доходность ценной бумаги i.

Формула для вычисления стандартного отклонения портфеля, состоящего из N ценных бумаг, имеет вид

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \right]^{1/2},$$

где $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ – ковариация (covariance) доходностей ценных бумаг i и j (мера того, насколько доходности двух ценных бумаг зависят друг от друга), ρ_{ij} – коэффициент корреляции (correlation coefficient) между доходностями ценных бумаг i и j, σ_i и σ_j – стандартные отклонения ценных бумаг i и j .

Очевидно, что из набора N ценных бумаг можно сформировать бесконечное число портфелей. Теорема об эффективном множестве (efficient set theorem) гласит: инвестор выберет свой оптимальный портфель из множества портфелей, каждый из которых обеспечивает:

- максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска;
- минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности.

Набор портфелей, удовлетворяющих этим двум условиям, называется эффективным множеством (efficient set).

На рис. 2.2 представлена иллюстрация достижимого множества (feasible set), представляющего собой все портфели, которые могут быть сформированы из группы в N ценных бумаг (точки G, E, S и H являются примерами таких портфелей). Точка S – соответствует наибольшей ожидаемой доходности, G – наименьшей, E – минимальному риску, H – максимальному риску. Эффективное множество портфелей лежит на верхней и левой границы достижимого множества между точками E и S. Все остальные достижимые портфели являются неэффективными. Инвестор должен нарисовать свои кривые безразличия на одном рисунке с эффективным множеством, а затем приступить к выбору портфеля, расположенного на кривой безразличия, находящейся выше и левее остальных. Оптимальной точкой является точка касания O кривой безразличия инвестора с кривой множества эффективных портфелей.

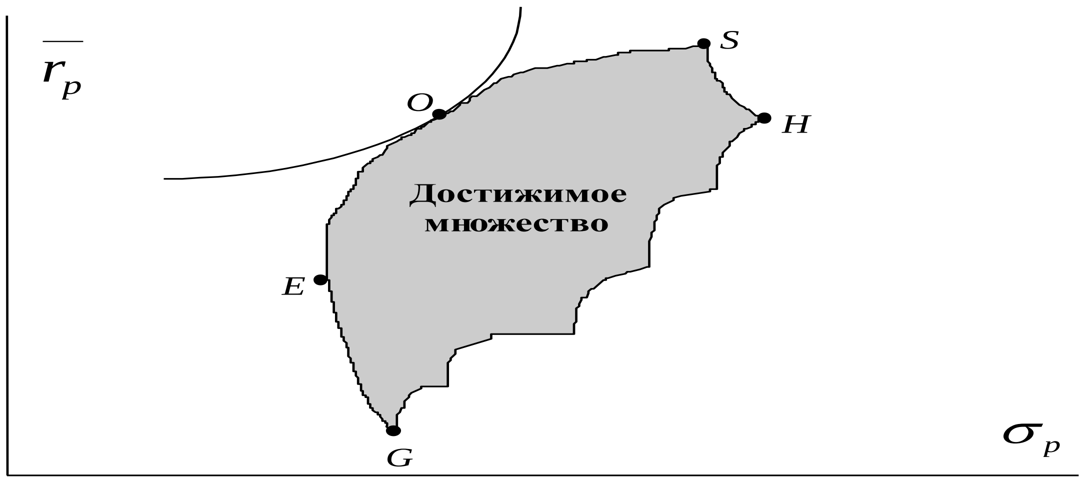


Рис. 2.2. Выбор оптимального портфеля

Рыночная модель

Доходность отдельной ценной бумаги обычно сравнивают с доходностью рыночного портфеля, где представлены все имеющиеся в наличии ценные бумаги, доля которых в портфеле зависит от стоимостных объемов эмиссии. В качестве доходности рыночного портфеля может быть выбрана доходность r_I на рыночный индекс I. Рыночные индексы – это специализированные талоны отражающие специфику инвестиций. Финансовые менеджеры, которые в результате своей работы достигают эталонного уровня, называются *пассивными* менеджерами. Менеджеры, в задачу которых входят превышение доходности, обеспечиваемой эталонными портфелями, называются *активными*. *Рыночная модель* (*market model*) отражает взаимосвязь доходности ценной бумаги с эталонным уровнем:

$$r_i = \alpha_{iI} + \beta_{iI} r_I + \varepsilon_{iI},$$

где r_i – доходность ценной бумаги i за данный период; r_I – доходность на рыночный индекс I за этот же период; α_{iI} – коэффициент смещения; β_{iI} – коэффициент наклона; ε_{iI} – случайная погрешность.

Коэффициент наклона рыночной модели часто называют *«бета»-коэффициентом* (*beta*) и вычисляют так:

$$\beta_{iI} = \sigma_{iI} / \sigma_I^2,$$

где σ_{iI} – ковариация между доходностью акции i и доходностью на рыночный индекс, σ_I^2 – дисперсия доходности на индекс.

Акция, которая имеет доходность, являющуюся зеркальным отражением доходности на индекс, имеют «бета»-коэффициент, равный 1. Акции с «бета»-коэффициентом больше единицы обладают большей изменчивостью, чем рыночный индекс, и называются *«агрессивными» акциями* (*aggressive stocks*). Акции с «бета»-коэффициентом меньше единицы обладают меньшей изменчивостью, чем рыночный индекс, и называются *«оборонительными» акциями* (*defensive stocks*).

Исходя из рыночной модели, общий риск ценной бумаги *i*, измеряемой ее дисперсией и обозначенной как σ_i^2, состоит из двух частей:

$$\sigma_i^2 = \beta_{iI}^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2,$$

где первое слагаемое отражает *рыночный* (или систематический) *риск* (*market risk*), а второе слагаемое – *собственный* (или несистематический) *риск* (*unique risk*).

Оценим теперь общий риск портфеля из *N* ценных бумаг:

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} X_i r_i = \sum_{i=1}^{N} X_i (\alpha_{iI} + \beta_{iI} r_I + \varepsilon_{iI}) = \alpha_{pI} + \beta_{pI} r_I + \varepsilon_{pI},$$

где $\alpha_{pI} = \sum_{i-1}^{N} X_i \alpha_{iI}$; $\beta_{pI} = \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_{iI}$; $\varepsilon_{pI} = \sum_{i=1}^{N} X_i \varepsilon_{iI}$.

Общий риск портфеля, измеряемый дисперсией его доходности и обозначаемоs σ_p^2, выражается следующим образом:

$$\sigma_p^2 = \beta_{pI}^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2, \text{ где } \beta_{pI}^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_{iI} \right]^2, \quad \sigma_{\varepsilon p}^2 = \sum_{i-1}^{N} X_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2.$$

Здесь предполагается, что случайное отклонение доходности ценных бумаг являются не коррелированными.

Последнее уравнение показывает, что общий риск портфеля состоит из двух компонент, аналогичных двум компонентам общего риска отдельных ценных бумаг (рыночный риск – первое слагаемое и собственный риск – второе слагаемое).

Можно показать, что увеличение *диверсификации* (*diversification*) может привести к снижению общего риска портфеля. Это происходит вследствие сокращения собственного риска портфеля, в то время как рыночный риск портфеля остается приблизительно таким же (рис. 2.3).

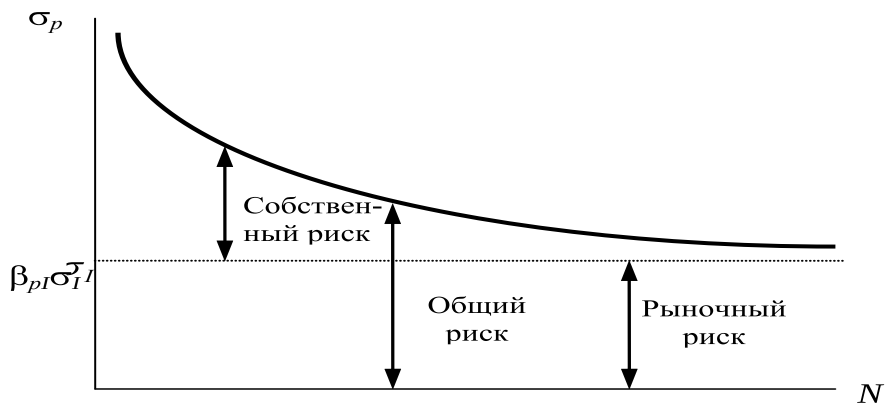


Рис. 2.3. Диверсификация портфелей

Модель оценки капитальных активов

Это – модель рыночного равновесия в которой ожидаемый доход по ценной бумаге равен без рисковой ставке плюс премия, определяемая на основе риска ценной бумаги в портфельном контексте. Если предположить, что не систематический риск устранен посредством диверсификации, то ожидаемый уровень дохода по акции *i* равен

$$\overline{r_i} = r_0 + (\overline{r_I} - r_0)\beta_i,$$

где r_0 – безрисковая ставка; $\overline{r_I}$ – ожидаемый доход на рыночный портфель; β_i – коэффициент «бета» акций *i*.

Пример 6. Предположим, что ожидаемый доход по государственным ценным бумагам составляет 10 %, ожидаемый доход на рыночный портфель – 15 %, а «бета»-коэффициент данной акции ранен 1,3. Тогда ожидаемый доход на акции составит

$$\overline{r_i} = 0.1 + (0.15 - 0.1) \cdot 1.3 = 16.5\%$$

Данная модель предоставляет широкие возможности для предсказания. Модель можно уточнять, вводя новые переменные, оказывающие воздействия на доход: налоги, инфляцию, ликвидность, эффекты масштаба, сезонные и промышленные эффекты. Не смотря на рост эффективности и правдоподобности модели при введении новых переменных, главная переменная, определяющая доход по ценным бумагам остается коэффициент «бета».

Модель Марковица

Ранее было отмечено, что существует бесконечное число портфелей, доступных для инвестора. В то же время инвестор должен рассматривать только те портфели, которые принадлежат к эффективному множеству. Однако это множество представляет собой изогнутую линию, что предполагает наличие бесконечного числа точек на ней. Это означает, что существует бесконечное количество эффективных портфелей. Марковец предложил решить проблему выбора с помощью алгоритма квадратического программирования, известного как *метод критических линий* (*critical-line method*).

Для начала инвестор должен оценить вектор ожидаемых доходностей ER и ковариационную матрицу VC.

Пример 7. Допустим, что в распоряжении инвестора имеются три фирмы A, B и C, выпускающие акции, причем величины VC и ER имеют следующие значения:

$$ER = \begin{bmatrix} 16.2 \\ 24.6 \\ 22.8 \end{bmatrix}, \quad VC = \begin{bmatrix} 146 & 187 & 145 \\ 187 & 854 & 104 \\ 145 & 104 & 289 \end{bmatrix}.$$

Затем определяется количество «угловых» портфелей, которые связаны с ценными бумагами и полностью описывают эффективное множество. «Угловой» портфель – это эффективный портфель, обладающий следующими свойствами: любая комбинация двух смежных «угловых» портфелей, представляет из себя третий портфель, лежащий в эффективном множестве между двумя «угловыми» портфелями.

Компанией, акции которой наиболее доходны, является компания *B*. Соответствующим эффективном портфелем буде первый «угловой» портфель, состав которого описывается следующим вектором весов:

$$X(1) = \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 1{,}00 \\ 0{,}00 \end{bmatrix}.$$

Его ожидаемая доходность и стандартные отклонения связаны только с акциями компании *B* и соответственно составляют 24,6% и $(854)^{1/2}$, или 29,22%. На рис. 2.4 данный портфель обозначен как (1).

Затем алгоритм определяет второй «угловой» портфель, расположенный на эффективном множестве ниже первого. Его состав определяется следующим вектором весов

$$X(2) = \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}22 \\ 0{,}78 \end{bmatrix}.$$

Это портфель, в котором инвестор вкладывает 22% своих фондов в акции компании *B* и 78% в акции компании С. Ожидаемая доходность и стандартное отклонение данного портфеля составляют соответственно 23,3 и 15,9%. На рисунке данный портфель обозначен (2).

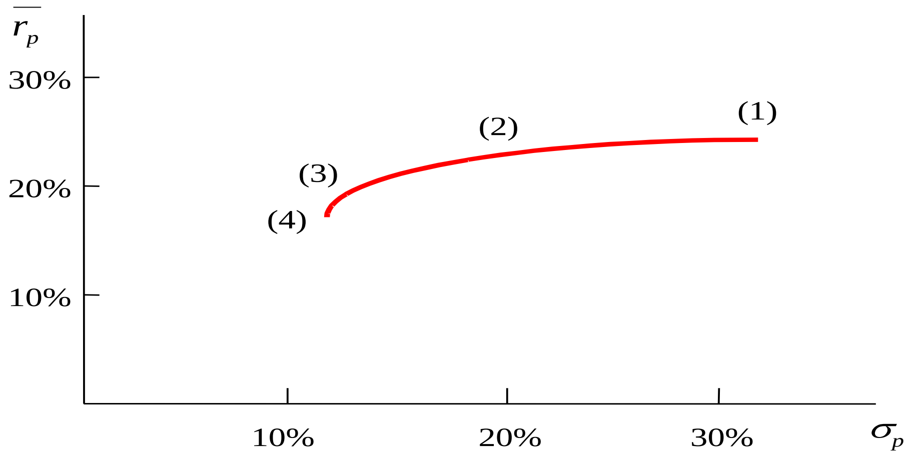


Рис. 2.4. Угловые портфели

Третий портфель имеет следующий состав:

$$X(3) = \begin{bmatrix} 0{,}84 \\ 0{,}00 \\ 0{,}16 \end{bmatrix}.$$

Ожидаемая доходность и стандартное отклонение данного портфеля равны соответственно 17,26 и 12,22%. Как и два предыдущих данный портфель является эффективным и обозначается на рисунке (3).

Далее алгоритм определяет состав четвертого «углового» портфеля:

$$X(4) = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0{,}00 \\ 0{,}01 \end{bmatrix}.$$

Можно вычислить его ожидаемую доходность и стандартное отклонение, которые равны 16,27% и 12,08% соответственно. Определив данный портфель, имеющий наименьшее стандартное отклонение из всех достижимых портфелей, алгоритм останавливается.

После того как были определены структура и местоположение эффективного множества Марковица, можно определить состав оптимального портфеля инвестора. Этот портфель соответствует точки касания кривых безразличия инвестора с эффективным множеством. Из графика инвестор определяет, где располагается эта точка и оценивает ожидаемую доходность портфеля. Теперь можно определить два «угловых» портфеля с ожидаемыми доходностями, лежащими выше или ниже данного уровня. Если ожидаемую доходность оптимального портфеля обозначить $\overline{r}^*$, а ожидаемые доходности двух ближайших «угловых» портфелей соответственно $\overline{r}^a$ и $\overline{r}^b$, то состав оптимального портфеля может быть определен с помощью решения следующего уравнения относительно Y:

$$\bar{r}^{*} = (\bar{r}^{a} \times Y) + \left[\bar{r}^{b} \times (1 - Y)\right].$$

Например, если оптимальный портфель имеет ожидаемую доходность в 20%, тогда можно заметить, что второй и третий «угловые» портфели являются верхним и нижним ближайшими «угловыми» портфелями, так как они имеют ожидаемые доходности соответственно 23,2% и 17,26%. В этом случае уравнение имеет следующий вид:

$$20\% = (23.2\% \times Y) + \left[17.26\% \times (1 - Y)\right].$$

Решением данного уравнения являются Y=0,46. Это означает, что оптимальный портфель состоит на 46% из второго «углового» портфеля и на 54% из третьего «углового» портфеля. В терминах объема инвестиций в ценные бумаги компаний A, B и C данное утверждение принимает следующий вид:

$$\left[0.46 \times X(2)\right] + \left[0.54 \times X(3)\right] = 0.46 \times \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.22 \\ 0.78 \end{bmatrix} + 0.54 \times \begin{bmatrix} 0.84 \\ 0.00 \\ 0.16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.10 \\ 0.45 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, инвестор должен вложить 45% своих фондов в акции A, 10% – в акции B и 45% – в акции C.

2.3. Методы портфельного анализа реальных инвестиций

Теория портфельного анализа может быть применима и при оценке эффективности капиталовложений.

Пример 8. Допустим, что у фирмы есть инвестиционные проекты (0), которые, как ожидается, приведут к созданию потоков денежных средств в будущем. Предположим, что у фирмы находится на рассмотрении четыре дополнительных инвестиционных предложения, не зависящих одно от другого. Присвоим этим проектам номера 1, 2, 3 и 4.

Исходными данными для анализа являются:

- математические ожидания чистой текущей стоимости каждого проекта;
- стандартные отклонения отдельных проектов;
- коэффициенты корреляции между проектами.

Эти данные приведены в следующих таблицах.

Таблица 2.3. Математические ожидания и стандартные отклонения проектов

Номер проекта	0	1	2	3	4
σ_i	4	2	5	3	2
NPV_i	9	-8	5	9	0

Таблица 2.4. Коэффициенты корреляции проектов

ρ_{ij}	0	1	2	3	4
0	1	-0,7	0,3	-0,6	0,7
1	-0,7	1	0,2	-0,2	0,3
2	0,3	0,2	1	0,5	0,4
3	-0,6	-0,2	0,5	1	0,6
4	0,7	0,3	0,4	0,6	1

Таблица 2.5. Возможные комбинации проектов

0	0,1	0,1,2	0,1,2,3	0,1,2,3,4
	0,2	0,1,3	0,1,2,4	
	0,3	0,1,4	0,1,3,4,	
	0,4	0,2,3,	0,2,3,4	
		0,2,4		
		0,3,4		

Дальнейшие расчеты можно производить с использованием табличного процессора. В начале вычисляются ковариация σ_{ij} между возможными чистыми текущими стоимостями проектов i и j:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j.$$

Таблица 2.6. Ковариационная матрица

σ_{ij}	0	1	2	3	4
0	16	-5,6	6	-7,2	5,6
1	-5,6	4	2	-1,2	1,2
2	6	2	25	7,5	4
3	-7,2	-1,2	7,5	9	3,6
4	5,6	1,2	4	3,6	4

Мерой доходности комбинации проектов в данном случае является математическое ожидание чистой текущей стоимости выбранного портфеля, которое равно сумме математических ожиданий отдельных чистых текущих стоимостей проектов, входящих в портфель:

$$NPV_p = \sum_{i=1}^{N} NPV_i$$

Таблица 2.7. Ожидаемые доходности портфелей проектов

9	1	6	15	15
	14	10	6	
	18	1	10	
	9	23	23	
		14		
		18		

Далее вычисляются стандартные отклонения для различных комбинаций проектов по формуле:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}}\ .$$

Таблица 2.8. Стандартные отклонения портфелей проектов

4	2,966	7,057	7,5498	9,4763
	7,28	1,000	8,6833	
	3,256	5,138	5,0794	
	5,586	7,912	9,6437	
		8,729		
		5,745		

Различные варианты могут быть представлены в виде множества точек на графике, горизонтальная ось которого – стандартное отклонение, а вертикальная ось – математическое ожидание чистой текущей стоимости. Каждая точка соответствует одной комбинации. Некоторые точки расположены выше других, так как они представляют проекты с более высоким математическим ожиданием чистой текущей стоимости и соответствующими стандартными отклонениями или с более низким стандартным отклонением и соответствующим математическим ожиданием чистой текущей стоимости, и с более низким стандартным отклонением. Доминирующие точки расположены в правой части графика (рис. 2.5).

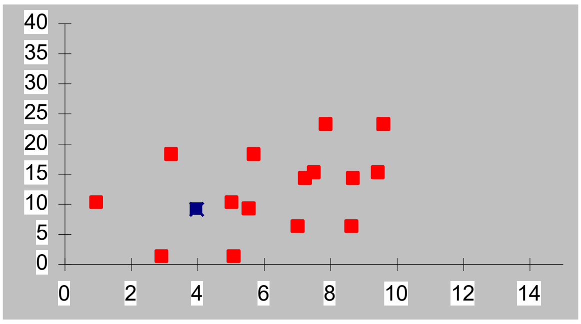


Рис. 2.5. Решение задачи портфельного анализа

На рисунке большим маркером указана точка, соответствующая основному проекту, включаемому во все комбинации. Оптимальная комбинация определяется пересечением одной из точек с самой левой верхней из возможных кривых безразличия инвестора.

3. ПРИМЕРЫ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Равновесие спроса и предложения

Спрос. Закон спроса

Спрос на какой-либо товар характеризует наше *желание купить* то или иное количество этого товара. Покупка данного товара – это жертва, т.е. отказ от покупки некоторых количеств других благ (товаров, услуг). Денежные затраты могут быть только частью затрат, необходимых для приобретения блага. Цена товара отражает альтернативную стоимость той жертвы, на которую идет покупатель.

Величина (объем) спроса на какой-либо товар – количество этого товара, которое согласно купить отдельное лицо, группа людей или население в целом в единицу времени (день, месяц, год ...) при определенных условиях. *Цена спроса* - максимальная цена, которую покупатели согласны заплатить за *определенное количество* данного товара.

Зависимость объема спроса от определяющих его факторов называют *функцией спроса.*

Функция спроса: $Q_A^D = f(P_a, P_в, ..., P_z, X_1, X_2, X_3, X_4,\ldots)$, где Q_A^D – величина спроса на товар A, P_a – цена товара A.

Детерминанты спроса: $P_в$, ..., P_z – цены на другие товары (B, ..., Z); X_1, X_2, X_3, X_4, … – неценовые факторы.

Если все факторы, кроме P_a, положить неизменными, то $Q_A^D = f(P_a)$ – функция спроса от собственной цены.

Между величиной спроса Q^D и ценой P товара существует обратная связь. Ее называют законом спроса.

Пример 1. Индивидуальный спрос покупателя И.И. на яблоки (абстрагируясь от их качества).

Таблица 3.1

Цена (руб.)	Объем спроса, кг в неделю
10	–
8	1
6	3
5	4
4	6
3	8

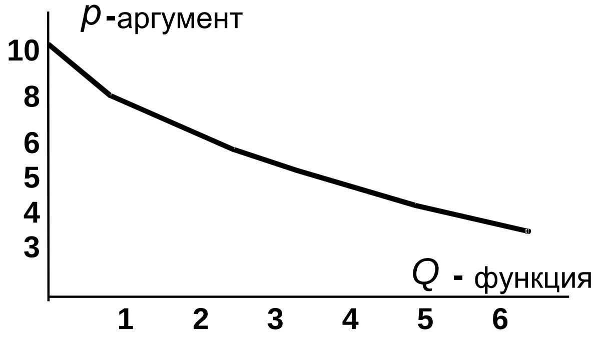


Рис. 3.1

В основе Закона спроса лежат:

1. *Здравый смысл.* Сама жизнь убеждает в том, что цена на товар может стать препятствием к его покупке; распродажи, напротив, привлекают покупателей.

2. *Закон убывающей предельной полезности.* Степень удовлетворения покупателей от каждой последующей единицы продукта снижается, и потребители покупают эти дополнительные единицы продукта только при условии снижения его цены.

3. *Эффект дохода.* При более низкой цене человек может купить больше данного товара, не отказывая себе в приобретении каких-либо других, альтернативных товаров.

4. *Эффект замещения.* При более низкой цене товара потребитель может захотеть его использовать вместо другого, аналогичного или похожего, на который цена не понизилась.

Детерминанты спроса меняют сам спрос, т.е. перемещают всю линию спроса. Существуют следующие детерминанты спроса:

- *Вкусы и предпочтения покупателей.* Они не только различны у разных покупателей, но и могут изменяться (иногда – почти мгновенно) под действием самых разных обстоятельств – от погоды до слухов.

- *Цены на другие товары.* Здесь возможны три ситуации, в каждой из которых спрос будет реагировать по-разному на изменение цен других товаров.

а) *Взаимозаменяемые товары.* Например, чай и кофе. Рост цен на кофе приводит к росту спроса на чай.

б) *Взаимодополняющие товары.* Рост цен на фотопленку снизит спрос на фотоаппараты.

в) *Независимые товары* (чай и соль). Возможно косвенное влияние, через эффект дохода.

- *Доходы покупателей и уровень их благосостояния.* Здесь возможны разные ситуации. Спрос на *нормальные товары* с ростом доходов и благосостояния покупателей растет, спрос же на т.н. *“товары низшей категории” (*не обязательно низкого качества), напротив, снижается. К товарам последней группы можно отнести маргарин, ливерную колбасу, подержанные вещи и т.п.

- *Ожидания покупателей.* Например**,** ожидание повышения цен на какой-то товар вызовет рост спроса на него еще до этого повышения; ожидание снижения собственных доходов вызовет снижение спроса на многие товары также заранее.

- *Число покупателей.* Оно влияет на совокупный, рыночный спрос, т.е. спрос, предъявляемый группой покупателей, сумму их индивидуальных спросов. В качестве такой группы может выступать население села, района, города и целой страны.

Экономической теории известно исключение из закона спроса – так называемый *“товар Гиффена”*. Примером такого товара может служить картофель для бедняков, составляющий основу их пищевого рациона. Рост цен на картофель (остающийся по-прежнему самым дешевым продуктом их питания) делает недоступными другие, более дорогие товары, в результате чего бедняки увеличивают спрос на картофель.

Иногда предлагаются и другие примеры исключений из закона спроса. Но при ближайшем рассмотрении большинство из них оказываются мнимыми.

Так, бизнесменам хорошо известны случаи, когда повышение цены на товар приводит к росту его продаж. Здесь проявляется эффект *“цена – показатель качества”*. Потребитель воспринимает рост цены как свидетельство более высокого качества (что далеко не всегда соответствует истине) и тем самым спрос увеличивается под действием одной из детерминант (вкусов и предпочтений потребителей). Тот же результат может возникнуть под действием т.н. *эффекта Веблена* (эффекта сноба) или *эффекта престижного спроса.* Если товар находится в группе престижных товаров, снижение его цены чревато резким уменьшением спроса на него. К мнимым исключениям из закона спроса можно отнести и *эффект ожидаемой динамики цен*. Ожидание дальнейшего роста цен повышает сегодняшний спрос, несмотря на повышение цены.

Совокупые (рыночный) спрос является суммой индивидуальных спросов покупателей.

Предложение

Предложение характеризует готовность продавца продать определенное количество того или иного товара в определенный период времени. Это также перечень соотношений между количеством предлагаемого к продаже товара и ценой на данный товар.

Объем предложения – это количество какого-то товара, которое желает продать на рынке продавец или группа продавцов в единицу времени при определенных условиях. *Цена предложения* – это минимальная цена, по которой продавец согласен продать определенное количество данного товара.

Зависимость объема предложения от определяющих его факторов называется *функцией предложения*.

Функция предложения: $Q_A^S = f(P_a, P_в, ..., P_z, X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots)$, где Q_A^S – объем предложения товара A, P_a – цена товара A.

Детерминанты предложения: $P_в$, ..., P_z – цены на другие товары (B, ..., Z); $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ – неценовые факторы.

Если все факторы, кроме P_a, положить неизменными, то $Q_A^S = f(P_a)$ – функция предложения от цены.

Между Q^S и P существует прямая связь, называемая *законом предложения.*

Пример 2. Индивидуальное предложение яблок конкретным продавцом.

Таблица 3.2

Цена (руб.)	Объем предложения, кг в неделю
4	5
5	20
6	30
8	45
10	60

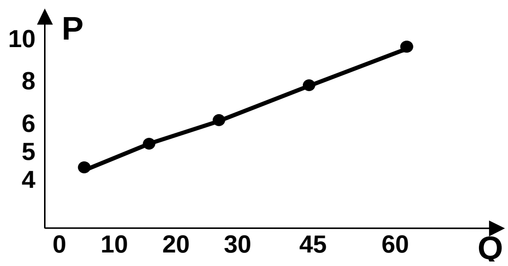


Рис. 3.2.

Следует различать изменение *объема предложения* и самого *предложения.*

Изменение объема предложения происходит при изменении только цены данного товара (движение по кривой предложения). Изменение *предложения* (сдвиг самой кривой), т.е. изменение функции предложения происходит в результате воздействия детерминант предложения.

Детерминанты предложения:

1. *Цены на ресурсы.* Существует связь между издержками производства и предложением. Все, что снижает издержки, способствует росту предложения.

2. *Технология.* Более совершенные и продуктивные технологии снижают издержки производства и увеличивают предложение.

3. *Природные условия.* Они также по-разному влияют на издержки, а значит, и на предложение.

4. *Налоги и дотации.*

5. *Цены на другие товары.* Влияние может быть различным в зависимости от того, каким образом связаны между собой разные товары (смотри график).

6. *Ожидания продавцов.* Они могут относиться и к динамике цен, и к изменениям погоды, и к налоговой политике государства и ко многому другому.

Совокупное (рыночное) предложение также является суммой индивидуальных предложений продавцов.

Рыночное равновесие

Представим на одном рисунке совокупный спрос и совокупное предложение.

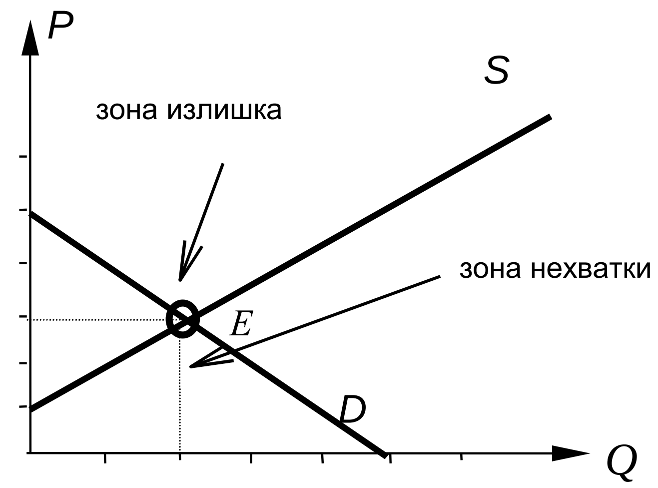


Рис. 3.3

Здесь E – точка рыночного равновесия. Ей соответствует равновесная цена P_E и равновесный объем Q_E: $Q_E^S = Q_E^D$; $P_E^S = P_E^D$.

При равновесной цене нет ни убытка, ни нехватки. Конкурентные силы спроса и предложения способны приводить рынок в состояние равновесия. С этой способностью связана *уравновешивающая функция цен*. Она проявляется в том, что субъекты рынка меняют свое поведение, стремясь приспособиться к новой ситуации с наибольшей выгодой для себя. Рост цены на какое-либо благо означает, что оно стало более редким, на что отреагируют и его потребители, и его производители.

В условиях свободного ценообразования избыток товара (превышение объема предложения над объемом спроса) приводит к падению цены, а нехватка, напротив, к ее росту.

Существование и единственность равновесия. Возможны ситуации, когда 1) равновесия не существует; 2) равновесие существует, но не является единственным.

1. Равновесия не существует.

- При любой цене $Q_S > Q_D$. Свободное благо: равновесие существует при нулевой цене (рис. 3.4).

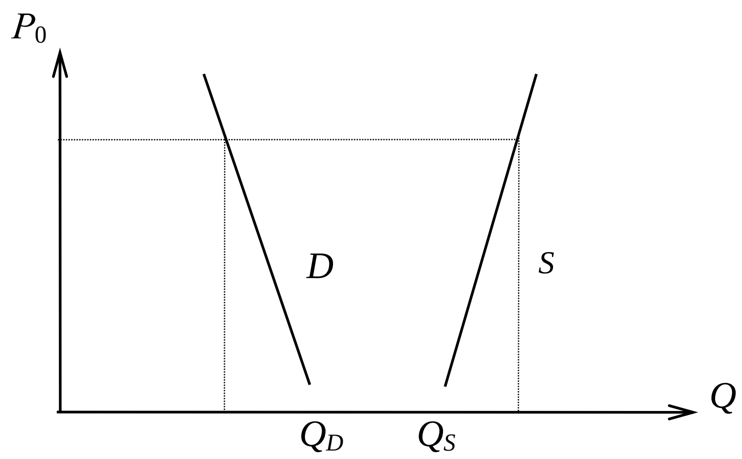


Рис. 3.4

- При любом объеме выпуска сумма денег, которую потребители готовы заплатить за данный товар, недостаточна для того, чтобы компенсировать затраты на его производство (рис. 3.5).

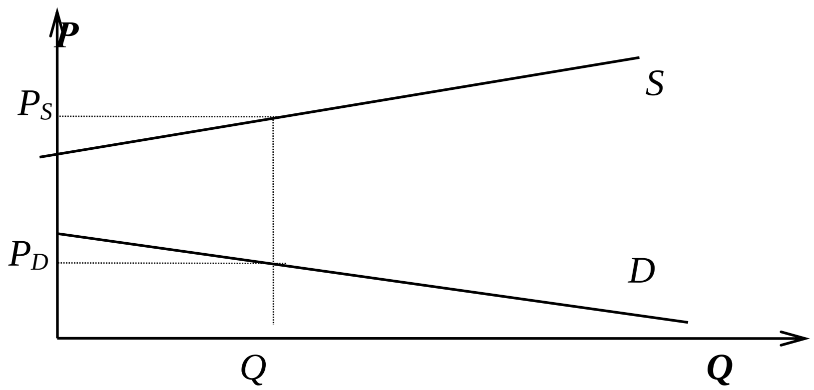


Рис. 3.5

2. Равновесие не является единственным.

- Линия предложения S меняет наклон. Характерно для рынка труда. Есть два положения равновесия: E_1 и E_2 (рис. 3.6).

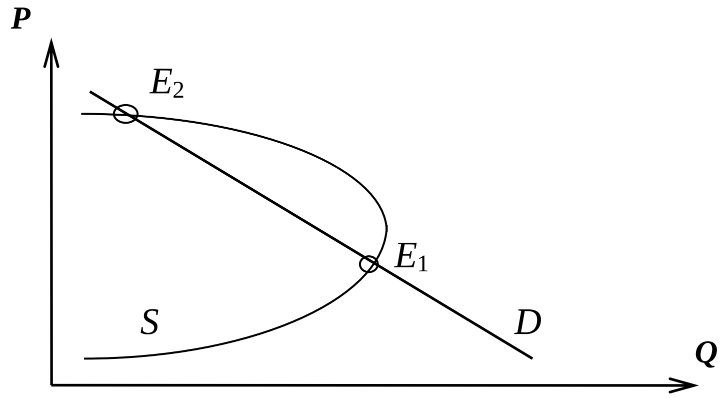
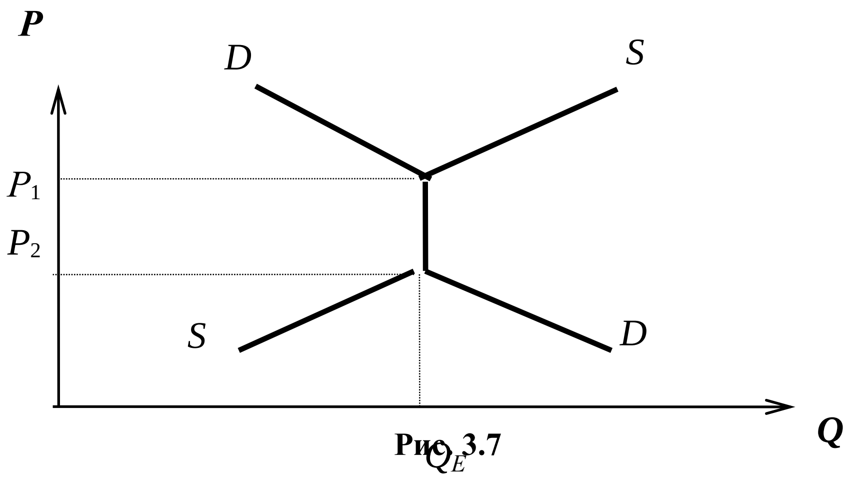


Рис. 3.6

- Равновесие на рынке достигается при любой цене в диапазоне от P_1 до P_2 и равновесном объеме Q_E. (рис. 3.7).



Р

Рис. 3.7

- Равновесие устанавливается при любом объеме в интервале от Q_1 до Q_2 и равновесной цене P_E (рис. 3.8).

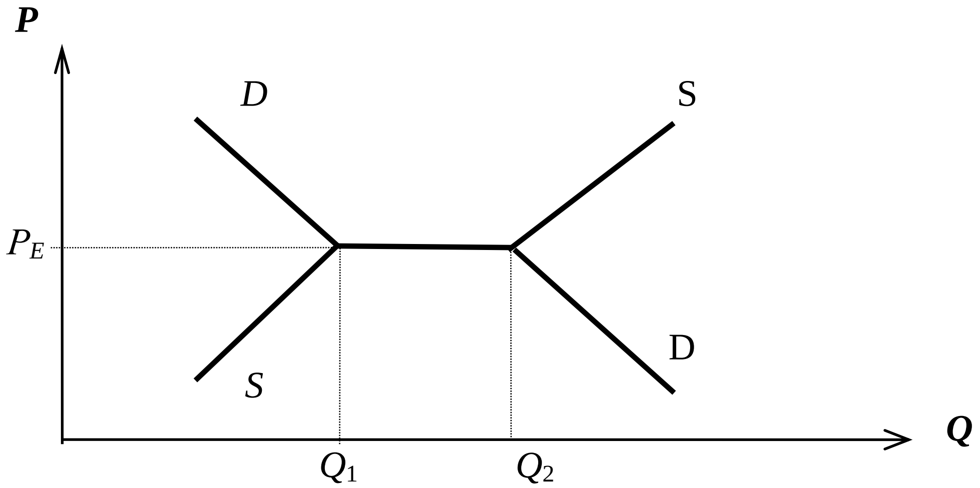


Рис. 3.8

Стабильность рыночного равновесия.

Если при отклонении рыночной цены от равновесной рынок возвращается к первоначальному состоянию равновесия, то это – устойчивое, стабильное равновесие (рис. 3.9).

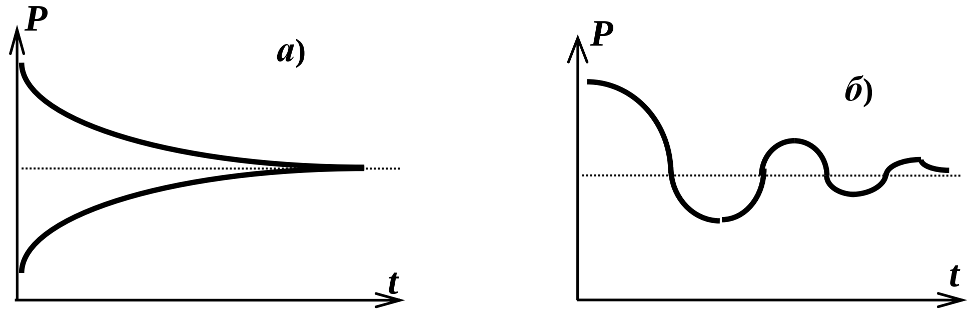


Рис. 3.9. Примеры устойчивого равновесия:
***а*) - плавный возврат; *б*) – затухающие колебания**

В случаях, если цена не возвращается к первоначальному значению, равновесие неустойчивое (рис. 3.10).

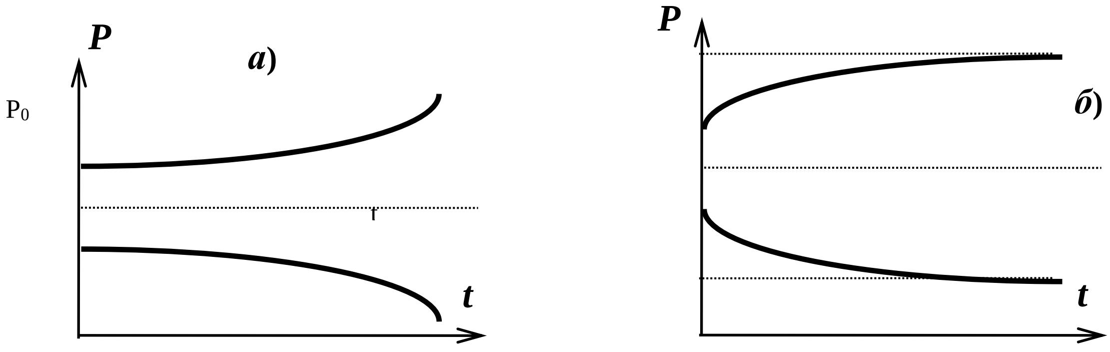


Рис. 3.10. Примеры неустойчивого равновесия:
***а*) – цена неограниченно растет или падает;**
***б*) – цена принимает новое равновесное значение**

Паутинообразная модель

Эта модель позволяет исследовать устойчивость цен и объемов продаж товаров на рынке при наличии запаздывания во времени (лага). Время в экономической динамике может рассматриваться как дискретное или непрерывное. В первом случае используется аппарат разностных уравнений, во втором – аппарат дифференциального исчисления и дифференциальных уравнений. Данная модель относится к динамической модели с дискретным временем.

Пусть некоторая производственная фирма определяет предложение товара в текущем периоде на основе цен, установившихся в предыдущем периоде:

$$S_t = S(p_{t-i}).$$

Спрос на товар зависит от цены товара в данном периоде:

$$D_t = D(p_i).$$

Предположим, что функции спроса и предложения линейны, причем функция предложения имеет положительный, а функция спроса – отрицательный наклон:

$$S_t = \alpha + \beta p_{t-1},\ D_t = \gamma - \delta p_t,\ \gamma > \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \delta > 0.$$

Пересечение прямых спроса и предложения дает равновесные значения цены и объема выпуска (рис. 3.11).

$$Q^* = \gamma - \delta p^* = \alpha + \beta p^*, \text{ откуда}$$

$$p^* = \frac{\gamma - \alpha}{\beta + \delta};\ Q^* = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta + \delta}.$$

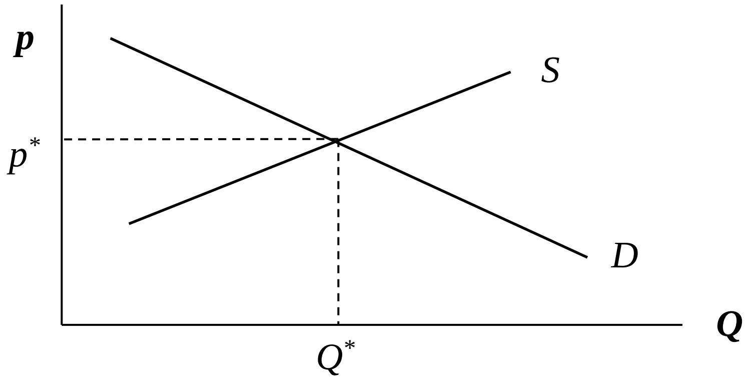


Рис. 3.11. Равновесие

Пусть теперь начальная точка не совпадает с равновесной. Выразим p_t через p_{t-1}:

$$p_t = \frac{\gamma - \alpha}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} p_{t-1}.$$

Тогда имеем:

$$p_1 = \frac{\gamma - \alpha}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} p_0, \quad p_2 = \frac{\gamma - \alpha}{\delta} - \frac{\beta}{\delta}\left[\frac{\gamma - \alpha}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} p_0\right], \quad \ldots,$$

$$p_n = \frac{\gamma - \alpha}{\delta}\left[1 - \frac{\beta}{\delta} + \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{n-1}\right] + (-1)^n\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n p_0.$$

Первое слагаемое есть сумма геометрической прогрессии

$$S_n = a_1\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ где } a_1 = \frac{\gamma - \alpha}{\delta},\ \ q = -\frac{\beta}{\delta}.$$

Тогда в произвольный дискретный момент времени i имеем:

$$p_i = \frac{\gamma - \alpha}{\delta} \frac{1 - (-1)^i\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^i}{1 + \frac{\beta}{\delta}} + (-1)^i\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^i p_0.$$

Проанализируем устойчивость состояния равновесия спроса и предложения в различных случаях.

1. Функция предложения имеет более крутой наклон, чем функция спроса (рис. 3.12).

$$\frac{\beta}{\delta}<1;\ \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^i\to 0;\ \ p_i\to p^*=\frac{\gamma-\alpha}{\beta+\delta}.$$

Равновесие устойчиво, цены на рынке стремятся к равновесному значению.

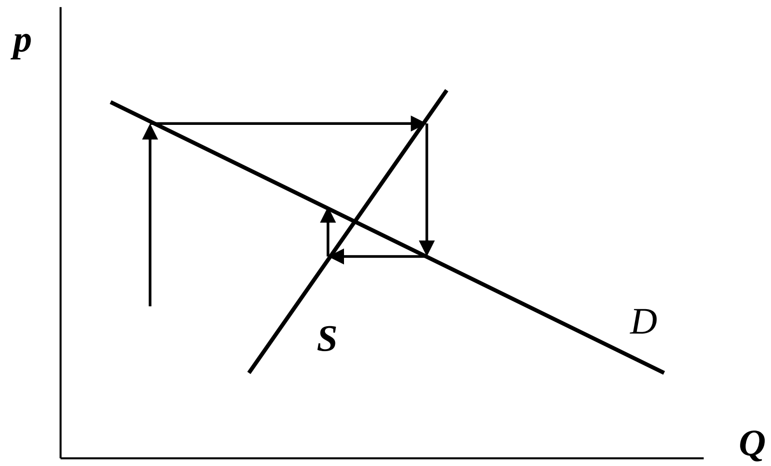


Рис. 3.12. Устойчивое равновесие

2. Функция предложения имеет менее крутой наклон, чем функция спроса (рис. 3.13).

$$\frac{\beta}{\delta}>1;\ \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^i\to\infty.$$

Равновесие неустойчиво, цены на рынке неограниченно растут.

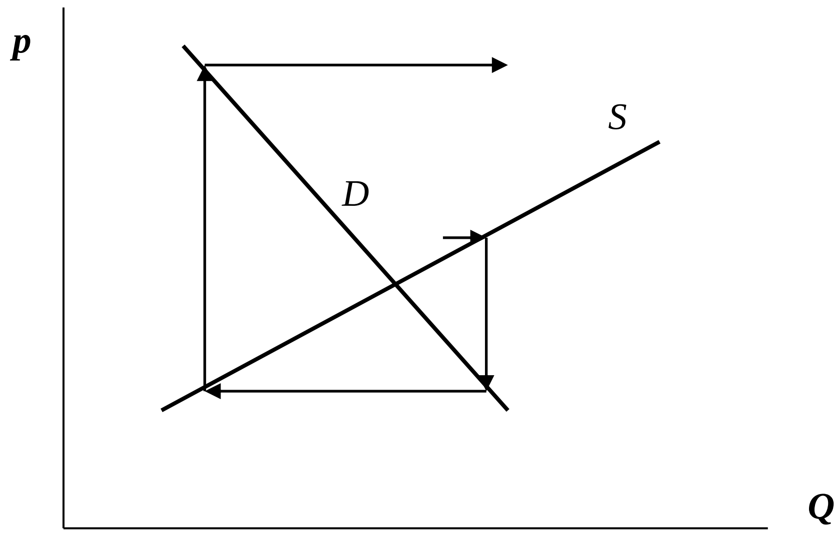


Рис. 3.13. Неустойчивое равновесие

3. Функции предложения и спроса имеют одинаковые наклоны (рис. 3.14). $\frac{\beta}{\delta}=1$.

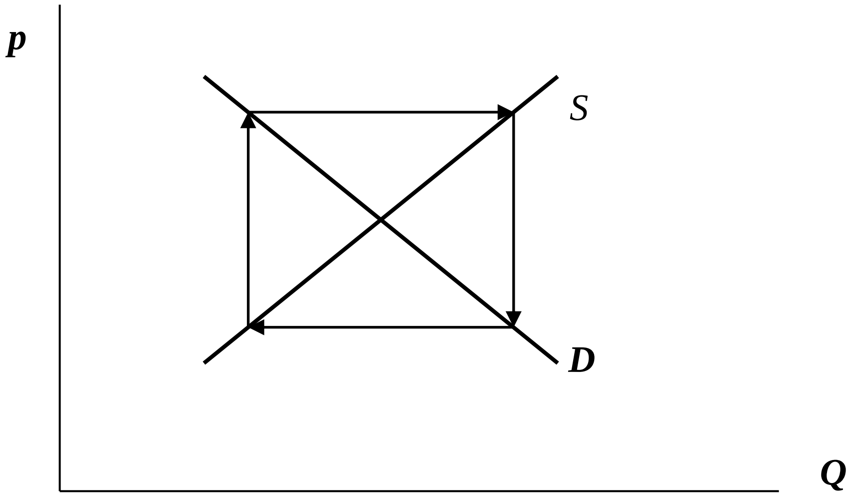


Рис. 3.14. Предельный цикл

3.2. Модели максимизации прибыли фирмы

Постановка задачи

Фирма – это основной элемент, экономический агент рыночной экономики. В современном мире насчитывается примерно 40 млн. фирм – разнообразных предпринимательских единиц, из которых около половины функционировали в США. Если фирма в качестве своей основной (доминирующей) цели выбирает максимизацию объема прибыли, то ее коммерческая политика далее определяется тем, насколько она может варьировать цену продажи своих товаров. Если эта фирма не является монополистом или олигополистом и должна исходить из неизменности цены, то она будет добиваться максимизации прибыли за счет варьирования объемов производства (продаж). Такое варьирование показано на рис. 3.15.

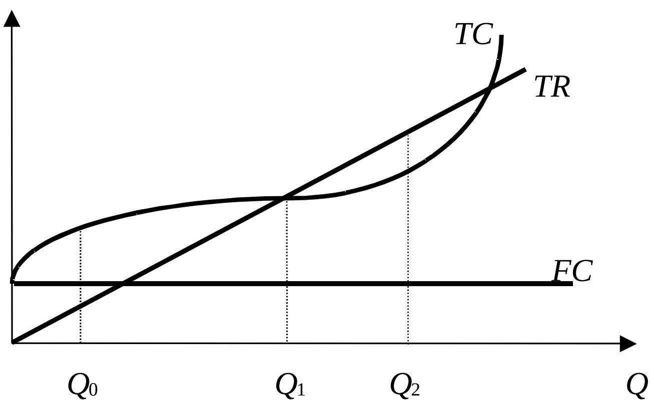


Рис. 3.15. Определение объема выпуска, обеспечивающего фирме в краткосрочный период получение максимальной прибыли при неизменных ценах: FC – постоянные затраты; TC – общие затраты; TR – выручка от продаж; Q – объем выпуска

Анализируя этот график, отметим несколько обстоятельств:

- из рисунка видно соотношение величины выручки, затрат и прибыли фирмы при различных вариантах объемов продаж, но для одного и того же периода времени, то есть представлена статичная ситуация;
- в силу неизменности цены кривая выручки от продаж *TR* проходит через начало координат (при нулевом объеме продаж выручка равна нулю);
- кривая постоянных затрат *FC* проходит параллельно оси *Q*, поскольку по определению постоянные затраты инвариантны к объему выпуска;
- так как даже при нулевом объеме продаж фирма будет вынуждена нести некоторые постоянные затраты, то кривая общих затрат *TC* не проходит через начало координат;
- с ростом объема продаж общие затраты начинают увеличиваться ускоренными темпами, что отражает закон убывающей отдачи - производительность труда уменьшается по мере роста объема продаж.

В этих условиях, как видно из рисунка, максимум убытков фирма будет иметь в том случае, если объем ее продаж составит Q_0. Если фирма сможет обеспечит объемы продаж, большие Q_0, то ее выручка *TR* будет расти в большей мере, чем общие затраты *TC*. Благодаря этому, убытки начнут сокращаться и фирма попадет в ситуацию, когда выручка от продаж станет равной затратам. Это точка пересечения кривых *TC* и *TR*, ей соответствует объем продаж Q_1. Это будет означать, что фирма ликвидирует убыточность продаж, т.е. достигнет *точки безубыточности.*

При объеме продаж Q_2 (когда общие затраты растут в том же темпе, что и выручка от продаж) масса прибыли будет максимальной, а при еще больших объемах будет становиться все меньше. Поэтому при неизменной рыночной цене фирме выгодно наращивать объемы продаж до тех пор, пока предельная выручка будет превышать предельные затраты.

Чтобы прибыль была максимальной, необходимо равенство предельных издержек и предельного дохода. *Предельные издержки* – дополнительные, добавочные издержки, связанные с производством еще одной единицы продукции. *Предельный доход* – дополнительный доход, связанный с производством еще одной единицы продукции.

Математическое решение данной задачи сводится к максимизации функции прибыли

$$P = N - Z,$$

где $N = TR = kQ$ – выручка фирмы; $k = k(Q)$ – цена единицы изделия; Q – количество выпущенных изделий; $Z = TC = Z(Q)$ – общие затраты.

Функция имеет экстремум, когда ее производная равна нулю:

$$\frac{dP}{dQ} = 0; \quad \frac{d(kQ)}{dQ} = \frac{dZ}{dQ}.$$

Поскольку вторая производная в точке экстремума отрицательна, прибыль достигает максимального значения в точке, где предельный доход (выручка) равен предельным издержкам (затратам).

Модель «директ-костинг»

В простейшем случае исследование связи между себестоимостью, объемом реализации продукции и прибылью можно осуществлять с помощью системы «директ-костинг», где предполагается линейная зависимость затрат от объема продукции.

В качестве примера рассмотрим табл. 3.3, где приведены исходные данные об объеме производства и затратах за анализируемый период (условные данные).

Таблица 3.3

Моменты отчета, мес.	Объем производства продукции (Q), шт.	Затраты на производство (Z), дол.
1	100	70
2	120	85
3	110	80
4	130	90
5	124	87
6	121	82
7	136	93
8	118	78
9	124	90
10	120	84
11	170	98
12	138	93

Сущностью системы *«директ-костинг»* является разделение затрат на производство на переменные и постоянные в зависимости от изменений объема производства. Общие затраты на производство Z состоят из двух частей: постоянной z_c и переменной z_v:

$$Z = z_c + z_v$$

или в расчете затрат на одно изделие

$$Z = (C_c + C_v)\, Q,$$

где Q – объем производства (количество единиц изделий); C_c, C_v – постоянные и переменные затраты соответственно в расчете на единицу изделия.

Используя данные об объеме производства и затратах за анализируемый период (по месяцам), можно построить уравнение затрат и линию изменения затрат в системе координат QZ по методу высшей и низшей точки.

При расчете используется следующий алгоритм:

1. Среди данных об объеме производства и затратах за период выбираются максимальные ($Q_{\max}$, $Z_{\max}$) и минимальные ($Q_{\min}$, $Z_{\min}$) значения объема и затрат соответственно;
2. Находятся разности в уровнях объема производства ΔQ и затрат ΔZ;
3. Определяется ставка переменных затрат на одно изделие:

$$C_v = \Delta Z / \Delta Q;$$

4. Находится общая величина переменных затрат на максимальный объем производства путем умножения C_v на $Q_{\max}$;
5. Вычисляется общая величина постоянных затрат

$$Z_c = Z_{\max} - C_v\, Q_{\max};$$

6. Составляется уравнение затрат, отражающее зависимость изменений общих затрат от изменения объема производства:

$$Z = Z_c + C_v Q.$$

При проведении расчетов для нашего примера, получим следующее уравнение затрат: $Z = 0{,}4*Q + 30$.

Аналитические возможности системы *директ-костинг* раскрываются наиболее полно при исследовании связи себестоимости с объемом реализации продукции и прибылью. Объем реализации продукции N связан с себестоимостью Z и прибылью от реализации P соотношением

$$N = Z + P.$$

Если предприятие работает прибыльно, то $P > 0$, если убыточно, то $P < 0$. При $P = 0$ выручка от реализации равна затратам. *Точка безубыточности,* соответствующая $P = 0$, находится аналитически или графически как точка пересечения прямой изменения затрат $Z = Z_c + C_v Q$ и прямой реализации $N = kQ$,где k – цена единицы изделия (в данной модели предполагается $k = \text{const}$).

Далее можно рассчитать следующие критические параметры (рис. 3.16):

- критический объем производства для заданной цены k

$$Q_{cr} = \frac{Z_c}{k - C_v};$$

- критический объем выручки

$$N_{cr} = \frac{Z_c}{1 - \frac{C_v}{k}};$$

- плановый объем производства для заданной суммы плановой (ожидаемой прибыли)

$$Q_{pl} = \frac{Z_c + P_{pl}}{k - C_v}.$$

Полагая для нашего примера k = 1,2 и P_{pl} = 50, получим Q_{cr} =37,5; N_{cr} = 45; Q_{pl} = 100.

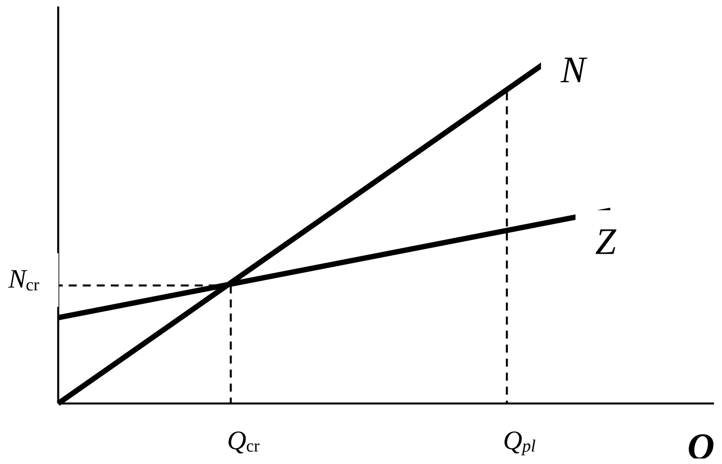


Рис. 3.16.

Аналитическая модель максимизации прибыли (модель монополии)

В предыдущем разделе предполагались линейные зависимости выручки и затрат от количества произведенной продукции. Однако эти зависимости могут отличаться от линейных. Так, нелинейность выручки от реализации продукции может быть связана с тем, что в условиях монополии цена продаж единицы продукции уменьшается с ростом Q. Предположим линейную зависимость $k(Q)$:

$$k = a_0 + a_1 Q .$$

В этом случае функция выручки – квадратичная:

$$N = kQ = a_0 Q + a_1 Q^2.$$

В свою очередь функцию затрат можно представить полиномом третьей степени:

$$Z = b_0 + b_1Q + b_2Q^2 + b_3Q^3.$$

Кубическая нелинейность может объясняться тем, что при производстве малой партии товаров издержки быстро растут, затем с ростом Q темп роста Z уменьшается, но по достижении некоторого критического значения Q начинает работать «закон убывающей отдачи», в соответствии с которым издержки вновь начинают расти ускоренными темпами.

Функция прибыли в данной модели имеет вид

$$P = N - Z = (a_0Q + a_1Q^2) - (b_0 + b_1Q + b_2Q^2 + b_3Q^3).$$

Прибыль максимальна, если предельный доход равен предельным издержкам или $dP/dQ = 0$:

$$(a_0 + 2a_1Q) - (b_1 + 2b_2Q + 3b_3Q^2) = 0.$$

Отсюда получим формулу для вычисления Q^*, соответствующего максимальной прибыли:

$$Q^* = \frac{(a_1 - b_2) \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 - 3b_3(b_1 - a_0)}}{3b_3}.$$

Предположим заданными коэффициенты: $a_0 = 5$; $a_1 = -0{,}1$; $b_0 = 10$; $b_1 = 1$; $b_2 = -0{,}1$; $b_3 = 0{,}01$. Тогда $Q^* = 11{,}55$; $P_{\max} = 20{,}79$.

Предельный анализ результатов хозяйственной деятельности предприятия

Рассмотрим модель, содержащую линейную функцию спроса (зависимость цены продаж от количества проданных товаров) и линейную функцию издержек. При этом используется аппарат регрессионного анализа имеющихся данных за n периодов. Анализ зависимости между ценой продукта и его количеством в динамике позволяет выбрать для функции спроса следующую форму:

$$k = a_0 + a_1Q.$$

В каждом из n периодов считаются заданными параметры k_i *и* Q_i. По методу наименьших квадратов определяются неизвестные параметры a_0 и a_1 на основе составления и решения системы нормальных уравнений вида:

$$n\,a_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} k_i;$$

$$a_0\sum_{i=1}^{n} Q_i + a_1\sum_{i=1}^{n} Q_i^2 = \sum_{i=1}^{n} k_iQ_i.$$

Неизвестные коэффициенты определяются из соотношений:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \sum_{i=1}^{n} Q_i^2 - \sum_{i=1}^{n} Q_i \sum_{i=1}^{n} Q_i k_i}{n\sum_{i=1}^{n} Q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right)^2}; \quad a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} Q_i k_i - \sum_{i=1}^{n} Q_i \sum_{i=1}^{n} k_i}{n\sum_{i=1}^{n} Q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right)^2}.$$

Аналогично проводится анализ зависимости между издержками и количеством выпускаемой продукции, который позволяет определить для функции издержек форму связи вида

$$Z = b_0 + b_1 Q .$$

Неизвестные b_0 и b_1 также находятся на основе решения системы нормальных уравнений:

$$n\, b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} Z_i;$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} Q_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} Q_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i Q_i,$$

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} Q_i^2 - \sum_{i=1}^{n} Q_i \sum_{i=1}^{n} Q_i Z_i}{n\sum_{i=1}^{n} Q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right)^2}; \quad b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} Q_i Z_i - \sum_{i=1}^{n} Q_i \sum_{i=1}^{n} Z_i}{n\sum_{i=1}^{n} Q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right)^2}.$$

Оптимальные параметры определяются из соотношений:

$$Q_{opt} = (b_1 - a_0)/(2a_1); \;\; Z_{opt} = b_0 + b_1 Q_{opt}; \;\; k_{opt} = a_0 + a_1 Q_{opt};$$

$$N_{\text{opt}} = k_{\text{opt}} Q_{\text{opt}}; \;\; P_{\text{opt}} = N_{\text{opt}} - Z_{\text{opt}} = (a_0 + a_1 Q_{\text{opt}}) Q_{\text{opt}} - (b_0 + b_1 Q_{\text{opt}}).$$

Модель оперативного управления запасами

Пожалуй, нет ни одной области практической деятельности, где не приходилось бы решать вопросов рационального размера запасов, необходимого для нормального функционирования системы. С этим приходиться иметь дело при организации производства, торговой сети, снабжения запасными частями и т.д. В условиях производства и торговли экономический ущерб приносит как чрезмерное наличие запасов, так и их недостаточность. В первом случае будут омертвлены средства, затраченные на приобретение и хранение излишнего количества неиспользуемых вещей. Если же эти вещи (материалы, полуфабрикаты, товары) в добавок имеют тенденцию терять свои качества (скоропортящиеся продукты, аптекарские товары и пр.), то потери возникают и из-за обесценения сделанных запасов. Если же запасы малы, то может нарушиться производственный процесс, снабжение продуктами и промышленными товарами.

Основная модель управления запасами, называемая *системой с фиксированным размером заказа*, проста и является классической (она известна уже более полувека). В такой системе размер заказа является постоянной величиной, а повторный заказ подается при уменьшении наличных запасов до определенного критического уровня (точка заказов). Система с фиксированным размером заказа основана на выборе размера партии, минимизирующего общие издержки управления запасами. Предполагается, что издержки управления запасами состоят из издержек выполнения заказа и издержек хранения запасов.

Издержки выполнения заказа представляют собой накладные расходы, связанные с реализацией заказа. Считается, что они не завися от размера заказов. Если C_0 – издержки выполнения заказа, а q – размер партии, то издержки выполнения заказа в расчете на единицу товара составляют C_0/q; при увеличении размера партии они уменьшаются с убывающей скоростью. Для определения годовых издержек выполнения заказа эту величину нужно умножить на количество товара S, реализованного за год.

Издержки хранения запасов включают в себя расходы, связанные с физическим содержанием товаров на складе, плюс возможные проценты на капитал, вложенные в запасы. Обычно издержки хранения выражаются в процентах от закупочной цены и связываются с определенным промежутком времени, например 20% за год. Если C_u – закупочная цена единицы товара, а i – издержки хранения, выраженные как доля этой цены, то $C_u\, i$ – годовые издержки хранения товара. Издержки хранения определяются средним уровнем хранения запасов. При постоянной интенсивности сбыта годовые издержки хранения запасов составляют $C_u iq/2$.

На рис. 3.17 показаны общие годовые издержки управления запасами (сумма издержек выполнения заказов и издержек хранения запасов), которые математически выражаются формулой:

$$\frac{C_0 S}{q} + \frac{C_u iq}{2}.$$

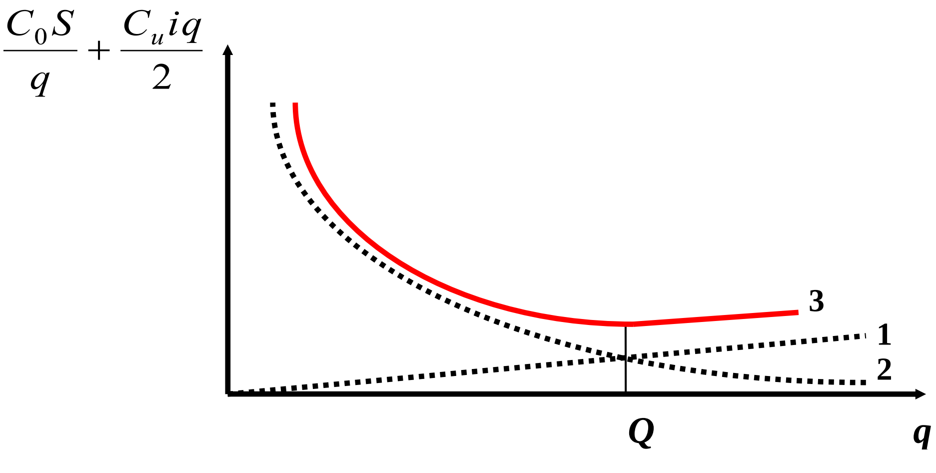


Рис. 3.17. Зависимость годовых издержек управления запасами от размера заказа: 1 - издержки выполнения заказов; 2 - издержки хранения запасов; 3 - издержки управления запасами.

Если взять от этого выражения производную по q и полученный результат приравнять к нулю, то получим равенство:

$$q_{,,\bullet\square} = Q = \sqrt{\frac{2C_0 S}{C_u i}} \text{ (поправить формулу)}$$

Значение Q, минимизирующее годовые издержки управления запасами, является наиболее экономичным размером заказа.

В идеальном случае (рис. 3.18*а*) уровень запасов уменьшается с постоянной интенсивностью, и как только он достигнет нуля, немедленно поступает новый запас размером Q. Поскольку такого воспроизводства запасов на практике обычно не встречается, на рис. 3.18*б* изображена более сложная модель. Для определения точки заказа необходимо знать временную задержку между моментом подачи заказа и моментом его получения, а так же ожидаемый сбыт S_d за время доставки L.

В ряде случаев фактический сбыт за время доставки заказов может превысить среднее значение, что приведет к дефициту (временной нехватки товаров). Поэтому при определении точки заказа P к ожидаемому сбыту за время доставки заказа добавляется страховой запас B. Точка заказа определяется по формуле

$$P = B + S_d L$$

Средний уровень запасов составляет

$$I_{ср} = B + Q/2$$

Необходимость в резервном запасе наглядно показана на рис. 3.18*в*, где рассматривается более реальный случай, когда интенсивность сбыта – случайная величина. Используя фактические данные о сбыте и времени доставки заказа, можно промоделировать процесс, а результаты моделирования, выраженные через вероятность дефицита и средние уровни запасов, можно сравнить с результатами полученными для существующей системы.

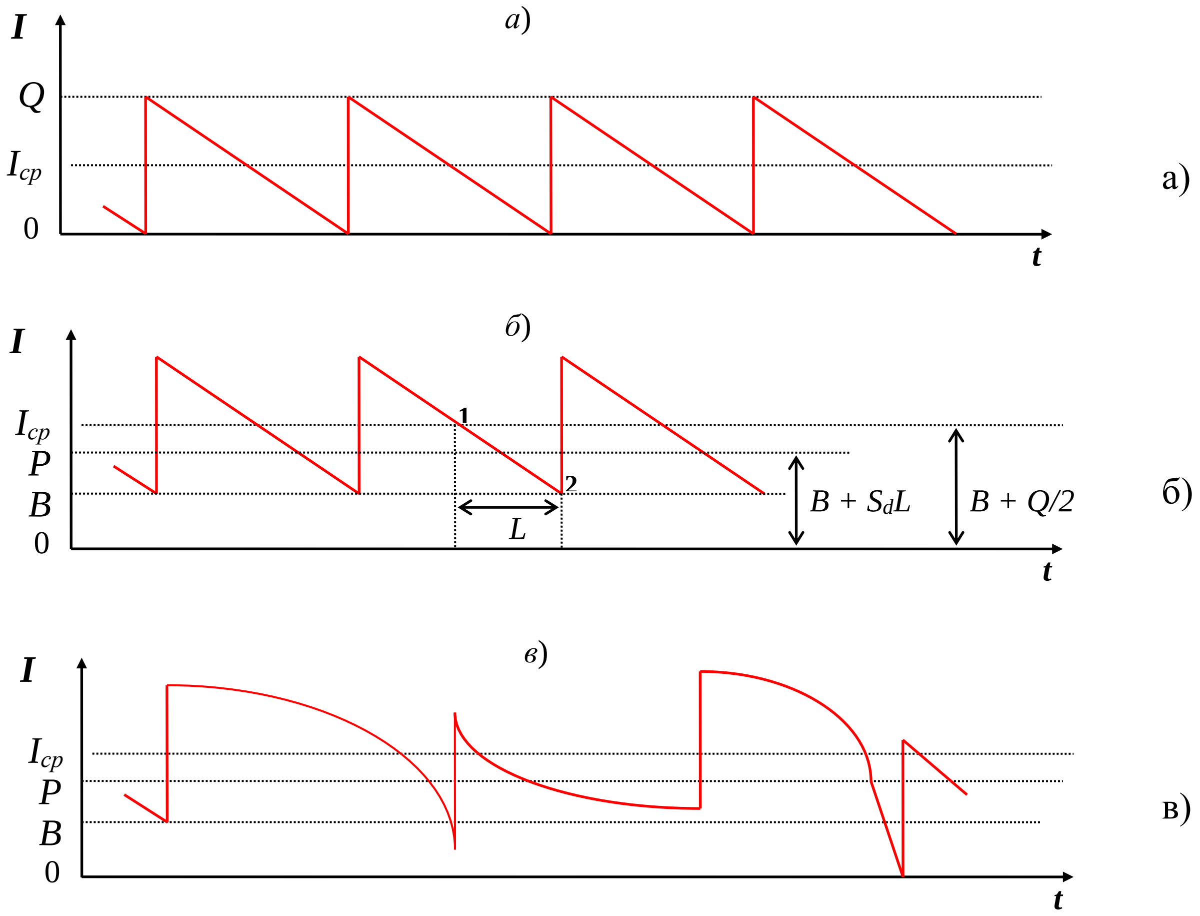


Рис. 3.18. Динамика запасов:
***а*) – влияние размера заказа на средний уровень запасов; *б*) – точка заказа модели с фиксированным размером заказа; в) – типичный процесс в системе с фиксированным размером заказа (Здесь *I* – наличные запасы; *t* – время; *Q* – размер заказа; $I_{ср}$ – средний уровень запасов; *B* – резервный (страховой) запас; *P* – точка заказа; 1 – момент подачи заказа; 2 – момент получения заказа; *L* – время доставки заказа в сутках; S_d – ожидаемый сбыт за время доставки.**

3.3. Модели прогнозирования

Прогнозирование объема сбыта играет важную роль во всех основных сферах деятельности фирмы. Методы прогнозирования могут быть разделены на три группы: количественные, качественные и комбинация из этих двух методов. Рассмотрим основные количественные методы составления прогнозов в свете расчета ожидаемого объема продаж.

Анализ временных рядов

В основе метода лежит информация о продажах за ряд прошлых периодов. Эти данные позволяют выявить долгосрочные тенденции и повторяющиеся циклы. При составлении прогнозов предполагаются неизменными существующие условия и тенденции.

Временной ряд – это ряд наблюдений, проводившихся регулярно через равные интервалы времени. В качестве примера рассмотрим данные об ежеквартальных объемах продаж компании *N* (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Год	Кв. I	Кв. II	Кв. III	Кв. IV
1997	64	75	80	157
1998	68	80	86	170
1999	69	83	91	188
2000	72	86	97	202

Рассмотрим основные элементы временного ряда.

Тренд – общая долгосрочная тенденция изменения временного ряда, лежащая в основе его динамики. В нашем примере видна положительная динамика (рост объемов продаж год от года).

Сезонные вариации – краткосрочные регулярно повторяющиеся колебания значений временного ряда вокруг тренда. В нашем примере максимальный за год значения объемов продаж всегда приходиться на четвертый квартал.

Цикл деловой активности – изменение параметров временного ряда в долгосрочном периоде, связанное с изменениями общей экономической конъюнктуры. При краткосрочном прогнозировании циклической составляющей ряда можно пренебречь.

Остаточная вариация – остается после того как прочие составляющие ряда удалены. Остаточная вариация может быть двух видов:

- аномальная – неестественно большое отклонение (возникает в форс-мажорных обстоятельствах);
- случайная – малое отклонение, которое невозможно предвидеть.

Для объединения отдельных элементов временного ряда используется *мультипликативная модель*:

Объем продаж = Тренд × Сезонная вариация – Остаточная вариация

Анализ временных рядов включает следующие этапы:

- расчет тренда;
- экстраполяция (распространение тренда на будущие периоды);
- расчет сезонной вариации;
- составление прогноза продаж.

Расчет тренда

Существуют различные методы расчета тренда. В данном разделе мы рассмотрим метод *скользящего среднего*, который применяется в том случае, если ряд содержит явно выраженные сезонные колебания. Пусть исходный ряд данных (обозначим его A_i) содержит m экспериментальных точек ($1 \le i \le m$). Известно, что ряд содержит сезонную вариацию с периодом n (в нашем примере $n = 4$). Простейший алгоритм нахождения тренда сводится к поиску значений тренда в соответствии с формулой

$$F_{i+n-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i-j+1}\,.$$

Применительно к нашему примеру это означает, что значения тренда вычисляются по следующим формулам:

$F_4=(A_1+A_2+A_3+A_4)/4$; $F_5=(A_2+A_3+A_4+A_5)/4$; … ; $F_{16}=(A_{13}+A_{14}+A_{15}+A_{16})/4$.

В любом случае будет построена линия тренда (рис.3.19).

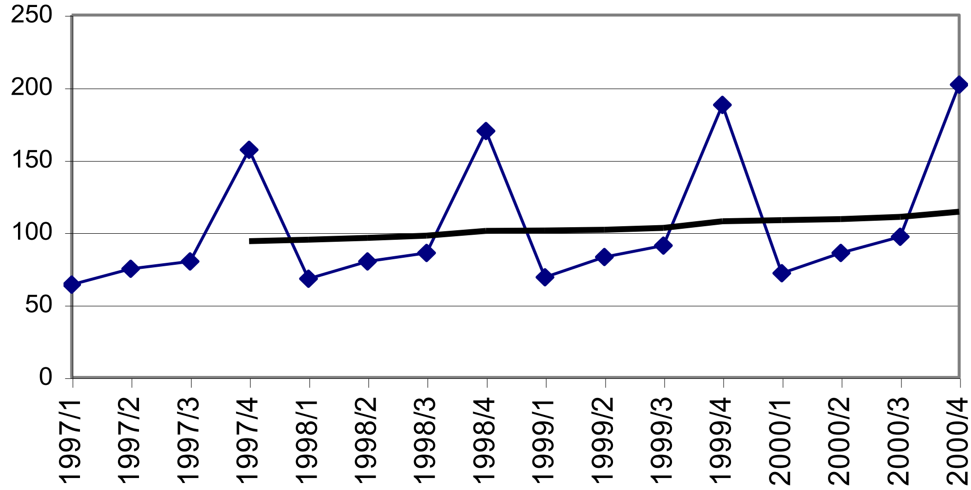


Рис. 3.19. Линия тренда:
объем продаж, тыс. р.; линия тренда

Недостатком приведенного алгоритма является не вполне корректная привязка тренда к исходным данным. Действительно, первая точка линии тренда привязана к четвертому периоду, хотя она получается как среднее значение первых четырех периодов. Более правильно было бы расположить ее между вторым и третьим периодами, что повысило бы точность окончательного прогноза.

Рассмотрим модернизированный алгоритм скользящего среднего, позволяющий осуществить временную привязку значений тренда к исходному ряду. Если n – четное, как в нашем случае, то формула нахождения тренда имеет вид

$$F_{i+n/2} = \frac{1}{2n}\left(A_i + A_{i+n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} A_{i-j+n} .$$

Если n – нечетное, например, в случае недельной вариации, то формула более простая, поскольку нет необходимости дополнительного центрирования данных:

$$F_{i+(n-1)/2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i-j+n} .$$

Экстраполяция

Для составления прогноза продаж на каждый квартал 2001 г. мы должны продолжить на графике тренд скользящих средних. Обычно это не сложно, так как процесс сглаживания устранил все колебания вокруг тренда. Для вычисления новых значений линии тренда можно использовать аппарат линейной регрессии.

Расчет сезонной вариации

Чтобы составить реальный прогноз продаж на каждый квартал 2001 г., необходимо детально рассмотреть схему поквартальной динамики объема продаж и рассчитать сезонную вариацию. Если взять данные о продажах за прошлые года и пренебречь в них трендом, то можно найти сезонную вариацию. Исходя из мультипликативной модели, каждый показатель объема продаж следует разделить на величину тренда:

Объем продаж / Тренд = Сезонная вариация × Остаточная вариация.

Нескорректированные данные содержат как сезонную, так и остаточную вариации. Для удаления последней необходимо скорректировать среднее значение. Каждое среднее значение нужно умножить на корректирующий коэффициент, чтобы в сумме средние давали 400.

Составление прогноза продаж

Теперь имеется вся информация, необходимая для прогноза объема продаж по кварталам 2001 г. Для этого необходимо прогнозное значение тренда умножить на значение соответствующей сезонной вариации. Окончательный график, содержащий исходные данные, тренд, прогноз тренда и прогноз продаж, приведен на рис. 3.20.

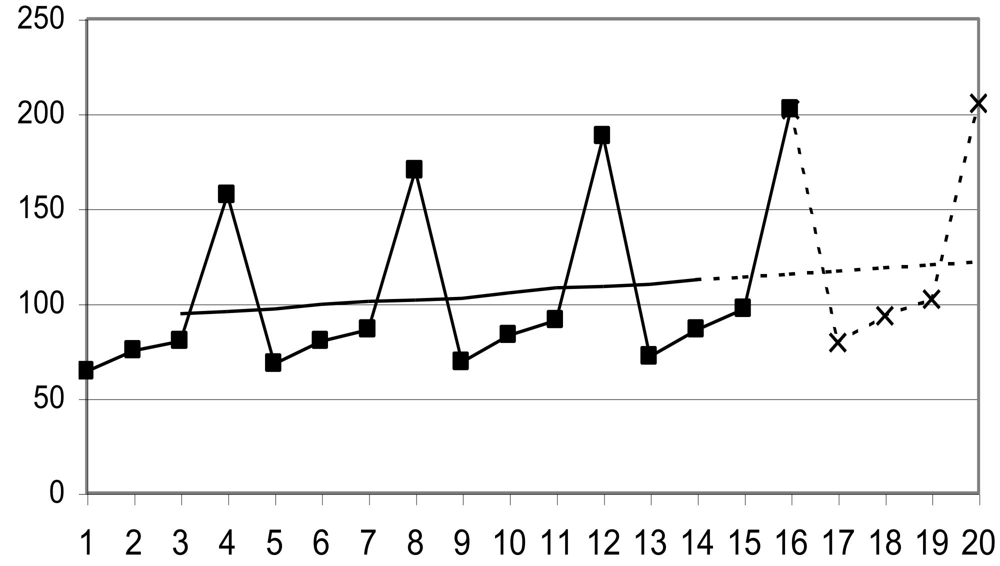


Рис. 3.20. Итоговый график:
исходные данные; линия тренда
прогноз тренда; прогноз продаж

Экспоненциальное сглаживание

Методика, используемая для преодоления проблем, связанных с краткосрочным прогнозированием, называется экспоненциальным сглаживанием. Поздним данным придается больший вес, чем более ранним данным. Этот метод обеспечивает быстрое получение прогноза на один период вперед и автоматически корректирует любой прогноз в свете различий между фактическим и спрогнозированным результатами. Этот метод чаще всего находит применение для прогнозирования спроса.

Простая модель экспоненциального сглаживания представлена следующим уравнением:

$$F_{t+1} = \alpha D_t + (1-\alpha)F_t,$$

где F_t – прогноз на текущий период (на период t); F_{t+1} – прогноз на следующий период (на период t + 1); α – константа сглаживания; D_t – фактический спрос на период t.

Прогноз на текущий период зависит в некоторой степени от данных прошлых периодов, и позже мы увидим на конкретном примере, как можно определить его значение. Константа сглаживания α – это величина между 0 и 1, которую выбирает составитель прогноза в зависимости от специфики конкретного применения. Если величина константы α выбирается равной нулю, то, как видно из уравнения, прогноз на следующий период будет равен прогнозу на текущий период, т.е. прогноз полностью основан на данных прошлого периода и не принимает в расчет наиболее поздние из имеющихся фактических данных.

С другой стороны, если константа α принимается равной единице, то данным прошлых периодов не придается никакого значения, и прогноз полностью зависит от фактического спроса на текущий период. Такой подход приемлем, если речь идет об открытии нового супермаркета. Понятно, что в подобном случае данные прошлых периодов для составления прогноза отсутствуют.

В условиях стабильности наиболее часто применяются значения константы сглаживания α от 0,1 до 0,4, однако в некоторые периоды года, особенно для предрождественской торговли в супермаркетах, для прогнозирования используются более высокие значения α: от 0,7 до 0,9. Очевидно, что необходимо иметь достаточный запас для удовлетворения текущего спроса.

Предположим, например, что сеть предприятий розничной торговли нелицензионным товаром использует методику экспоненциального сглаживания для составления прогноза недельного спроса. Для сигарет константа сглаживания установлена в размере 0,3. Текущий спрос на сигареты в одном из магазинов составляет 750 пачек при прогнозе 720 пачек. Применение формулы экспоненциального сглаживания для прогнозирования спроса на сигареты на следующую неделю выглядит так:

$$\text{Прогнозируемый спрос} = 0{,}3 \times 750 + (1 - 0{,}3) \times 720 = 729 \text{ пачек.}$$

Выбор константы сглаживания можно сделать на основе более точных расчетов. Одна из методик связана с минимизацией среднего абсолютного отклонения (САО). Определим ошибку прогноза как разность между прогнозным и фактическим объемами продаж. Можно заметить, что если прогноз выше, чем фактическое значение, то ошибка положительна, а если прогнозное значение ниже, то ошибка отрицательна. При мониторинге ошибок прогноза их знак не играет столь важной роли, как величина. Поэтому обычно находят *абсолютное отклонение*, представляющее собой модуль ошибки прогноза. Чтобы оценить, насколько хорош прогноз, можно *рассчитать среднее абсолютное отклонение* (САО). Решая задачу минимизации САО, можно более точно определить константу сглаживания α.

Корреляция и регрессионный анализ

При открытии нового предприятия данные за прошлые периоды отсутствуют, и для прогнозирования требуется иной подход. В этом случае можно использовать данные аналогичного предприятия с целью выявления возможной взаимосвязи между объемом продаж и каким-либо переменным показателем, значение которого можно установить (*корреляционный анализ*). Если такие показатели находятся, то применяют технику *регрессионного анализа* для построения уравнения, описывающего выявленную взаимосвязь. Затем это уравнение может использоваться для составления прогнозов (рынок считается совершенно конкурентным).

Первая стадия корреляционного анализа – сбор данных о значениях переменных, которые могут иметь взаимосвязь. В качестве примера рассмотрим данные среднего еженедельного оборота (тыс. р.) в десяти отделениях крупной сети магазинов фасонной одежды, а также данные о численности населения (тыс. чел.), проживающего в радиусе 30-минутной езды от отделений (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Отделение магазина	Численность населения	Еженедельный оборот
1	287	24
2	161	15
3	75	18
4	191	22
5	450	43
6	323	35
7	256	32
8	312	25
9	142	19
10	210	23

Для того, чтобы убедиться, достаточно ли сильна корреляционная связь, можно найти *коэффициент корреляции.* Этот показатель измеряет тесноту линейной связи и рассчитывается на основе имеющихся пар значений двух переменных x и y. Формула для расчета коэффициента корреляции следующая:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}.$$

В нашем случае значение коэффициента корреляции $r = 0{,}885$. Это значение близко к +1, что подтверждает наличие сильной корреляционной связи между численностью населения и объемом продаж.

Для нахождения уравнения прямой, которое наилучшим образом описывает зависимость объема продаж (y) от численности населения (x), следует использовать метод наименьших квадратов. В простейшей постановке он сводится к следующему. Уравнение прямой будем искать в виде

$$y = a + bx.$$

Неизвестные коэффициенты регрессии a и b определяются из условия минимизации суммы квадратов вертикальных отклонений исходных точек от прямой регрессии:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a + bx_i)\right]^2 \to \min .$$

Продифференцировав функцию S по a и по b и приравняв производные нулю, получим значения коэффициентов линейной регрессии, соответствующих минимуму суммы квадратов отклонений. Опуская промежуточные вычисления, приведем формулы для нахождения значений a и b:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}, \quad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Если у нас есть уравнение прямой регрессии, то его можно использовать для составления прогноза значений y. Если прогноз осуществляется для x, находящихся в пределах исходного интервала значений, то такая процедура называется *интерполяцией*. В случае составления прогноза для x, находящихся вне исходного интервала значений, – *экстраполяцией*.

Процесс экстраполяции можно провести графически, изменив формат линии тренда. Например, спрогнозируем объем продаж магазина фасонной одежды, если население, проживающее в пределах 30-минутной езды от него, составляет 750 тыс. чел. Поскольку максимальное значение ряда x составляют 450, необходим прогноз вперед на 300 единиц (рис. 3.21).

Коэффициент определенности (R-квадрат), равный квадрату коэффициента корреляции, показывает, какая часть вариаций зависимой переменной y объясняется уравнением регрессии. В нашем примере можно утверждать, что в соответствии с уравнением регрессии 78,3% вариаций объема торговли объясняется изменением численности населения.

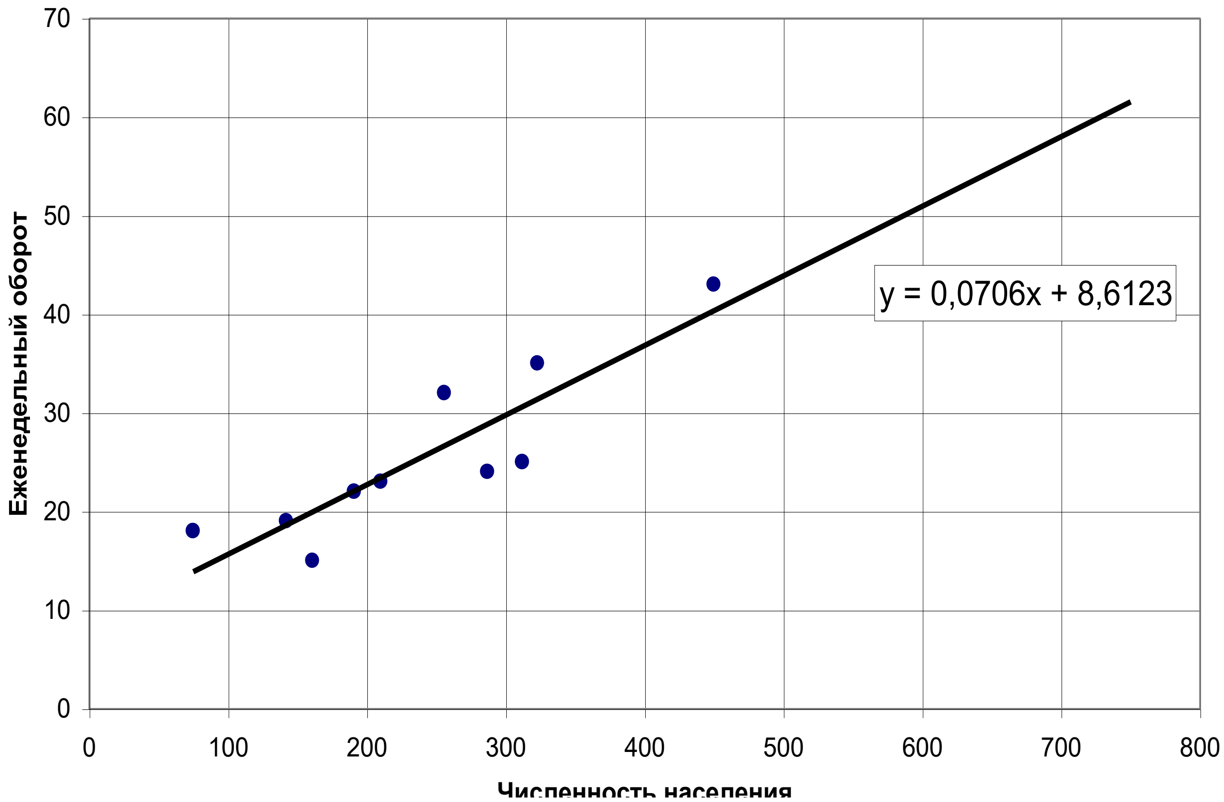


Рис. 3.21. Экстраполяция

Оценить достоверность коэффициента определенности можно с помощью *F-распределения*, которое определяет вероятность того, что зависимость *y* от *x* отсутствует. Обычно считается достаточной пятипроцентная вероятность отсутствия зависимости. В нашем случае вероятность составляет 0,067%, следовательно, полученная зависимость может считаться достоверной.

Следующим вопросом, требующим оценки, является достоверность значения определяемых величин *a* и *b*, которая оценивается вероятностью *распределения Стьюдента.* Полученные результаты показывают, что достоверность величины *b* составляет 99,93%, а достоверность величины *a* – 96,32%.

Соответствующие функции, реализующие приведенные расчеты содержатся в пакете анализа табличного процессора Excel.

Множественная регрессия

Хотя линейная регрессия и позволяет составлять прогнозы во многих ситуациях, но иногда она не работает. Обычно нет оснований полагать, что все изменения объема продаж обусловлены только одной причиной. Более вероятным представляется наличие влияния множества таких различных факторов, как размер торговой площади, число работников, число контрольно-кассовых аппаратов, количество конкурирующих магазинов в районе, уровень цен, ассортимент товаров и т.д.

Модель линейной регрессии, использованная нами, может быть распространена и на ситуации, при которых объем продаж зависит от целого ряда переменных. В этом случае мы получим *множественную регрессию.*

Предположим, что отдел маркетинга компании по продаже модной одежды намеревается рассчитать уровень объема продаж в случае открытия нового магазина. Считается, что он будет определяться двумя факторами: торговой площадью и численностью персонала. Исходные данные, отобранные по уже существующим торговым точкам, приведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Магазин	Объем продаж	Торговая площадь	Численность персонала
1	900	100	10
2	2720	150	14
3	1300	200	11
4	2280	200	12
5	1920	270	11
6	2800	330	11
7	2400	370	11
8	2960	490	10
9	2800	520	11
10	3200	320	14

Проведем сначала анализ линейной регрессии объема продаж от размера торговой площади. Модель линейной регрессии в данном случае выглядит так:

$$y = 1297{,}7 + 3{,}493\, x,$$

где y – объем продаж; x – размер торговой площади. Прочие интересующие нас результаты регрессионного анализа:

- коэффициент корреляции 0,649;
- коэффициент определенности 0,422;
- вероятности недостоверного определения коэффициентов регрессии 2,4% и 4,2% соответственно.

Таким образом, можно сделать вывод о наличии линейной зависимости объема продаж от торговой площади.

Теперь проведем анализ линейной регрессии объема продаж от численности персонала. Модель линейной регрессии в данном случае выглядит так:

$$y = -494{,}2 + 245{,}4\,x,$$

где y – объем продаж; x – численность персонала. Прочие интересующие нас результаты регрессионного анализа:

- коэффициент корреляции 0,47;
- коэффициент определенности 0,22;
- вероятности недостоверного определения коэффициентов регрессии 79,97% и 16,98% соответственно.

В данном случае очевидно, что линейная зависимость объема продаж от численности персонала практически отсутствует.

Построим модель множественной регрессии, чтобы определить, получит ли вариация объема продаж более полное объяснение при анализе двух переменных одновременно.

Интерпретация результатов анализа множественной регрессии дает нам следующую модель:

$$y = -3047{,}9 + 4{,}419\,x_1 + 354{,}1\,x_2,$$

где y – объем продаж; x_1 – размер торговой площади; x_2 – численность персонала.

Прочие интересующие нас результаты анализа множественной регрессии:

- множественный коэффициент корреляции 0,923;
- коэффициент определенности 0,853;
- вероятности недостоверного определения коэффициентов регрессии 1,79%, 0,09% и 0,26% соответственно.

Полученные результаты свидетельствуют, что мы значительно улучшили соответствие уравнения регрессии исходным данным, поэтому в данном случае целесообразнее использовать модель множественной регрессии.

Теперь для составления прогноза объема продаж нам необходимо знать как размер торговой площади, так и численность персонала. Предположим, что в новом магазине планируется 14 рабочих мест, а размер торговой площади 350 кв. м. Расчет объема продаж на основе уравнения множественной регрессии составит $-3047{,}9 + 4{,}419 \times 350 + 354{,}1 \times 14 = 3456{,}3$ тыс. р.

3.4. Межотраслевая модель Леонтьева

В 30-е годы двадцатого столетия Нобелевский лауреат в области экономики В. Леонтьев разработал модель межотраслевого баланса, которая и сейчас широко используется при анализе межотраслевых связей.

Предположим, что сектор народного хозяйства страны разбит на n отраслей. Каждая отрасль выпускает продукт только одного типа, а разные отрасли выпускают разные продукты. Кроме того, в процессе производства своего вида продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей.

Каждая отрасль характеризуется следующим балансом:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + y_i ,$$

где x_i – выпуск продукции i-й отрасли; y_i - конечный спрос на продукцию i-й отрасли; c_{ij} представляет количество продукции отрасли i, производительно потребленной в отрасли j.

Пусть в экономике, состоящей из трех отраслей – 1, 2 и 3, технология производства характеризуется коэффициентами технологических затрат: $c_{11} = 0{,}1$; $c_{12} = 0{,}2$; $c_{13} = 0{,}2$; $c_{21} = 0{,}2$; $c_{22} = 0{,}2$; $c_{23} = 0{,}4$; $c_{31} = 0{,}3$; $c_{32} = 0{,}4$; $c_{33} = 0{,}1$. При полном использовании производственных возможностей отрасль 1 может произвести 668,42; отрасль 2 – 1197,47; отрасль 3 – 1310,53 ед. продукции. Каков должен быть спрос на конечную продукцию этих отраслей, чтобы их производственные мощности использовались полностью?

$$y_1 = (1 - c_{11})\, x_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 = 0{,}9\times 668{,}42 - 0{,}2\times 1197{,}47 - 0{,}2\times 1310{,}53 = 100;$$
$$y_2 = (1- c_{22})\, x_2 - c_{21}x_1 - c_{23}x_3 = 0{,}8\times 1197{,}47 - 0{,}2\times 668{,}42 - 0{,}4\times 1310{,}53 = 300;$$
$$y_3 = (1- c_{33})\, x_3 - c_{31}x_1 - c_{32}x_2 = 0{,}9\times 1310{,}53 - 0{,}3\times 668{,}42 - 0{,}4\times 1197{,}47 = 500.$$

Теперь рассмотрим обратную задачу. Пусть в экономике, состоящей из трех отраслей – 1, 2 и 3, технология производства характеризуется следующими коэффициентами технологических затрат: $c_{11} = 0{,}1$; $c_{12} = 0{,}2$; $c_{13} = 0{,}2$; $c_{21} = 0{,}2$; $c_{22} = 0{,}2$; $c_{23} = 0{,}4$; $c_{31} = 0{,}3$; $c_{32} = 0{,}4$; $c_{33} = 0{,}1$. Спрос на конечную продукцию каждой отрасли соответственно равен $y_1 = 100$; $y_2 = 300$; $y_3 = 500$. Найти выпуски продукции каждой отрасли, удовлетворяющие данному спросу.

Задача может быть решена численно на ЭВМ с использованием языков программирования, либо одного из стандартных пакетов прикладных программ. При больших порядках системы (в реальной ситуации количество отраслей существенно больше, чем в нашем примере) более правильно использовать не прямые, а итерационные методы решения системы линейных уравнений. Введем переобозначения:

$$a_{11} = 1 - c_{11};\ a_{12} = -c_{12};\ a_{13} = -c_{13};\ a_{21} = -c_{21};\ a_{22} = 1 - c_{22};\ a_{23} = -c_{23};$$
$$a_{31} = - c_{31};\ a_{32} = -c_{32};\ a_{33} = 1 - c_{11};\ b_1 = y_1;\ b_2 = y_2;\ b_3 = y_3.$$

Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Записав систему в приведенном виде, получим итерационную формулу для нахождения вектора неизвестных:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k\right), \\ x_2^{k+1} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k\right), \\ x_3^{k+1} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k\right). \end{cases}$$

Эта система может быть решена методом простой итерации, если выполняется условие сходимости метода:

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j \neq i}\left|a_{ij}\right|.$$

В нашем примере

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}3 & -0{,}4 & 0{,}9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

Условие сходимости выполняется. В качестве начального приближения выбираем нулевой вектор $X^0 = (0;\ 0;\ 0)$. Итерационный процесс продолжается вплоть до достижения каждой из компонент вектора неизвестных заданной точности:

$$\left|x_i^k - x_i^{k-1}\right| < \varepsilon.$$

На рис. 3.22 приведен пример решения задачи в пакете Excel. Приближенные значения уровней выпуска для трех отраслей равны соответственно $x_1 \approx 665{,}7$, $x_2 \approx 1193{,}3$, $x_3 \approx 1306{,}4$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	**Модель Леонтьева**															
2		Исходные данные										Преобразованные данные				
3																
4		ci1	ci2	ci3	yi			Точность					ai1	ai2	ai3	bi
5	1	0,1	0,2	0,2	100			5				1	0,9	-0,2	-0,2	100
6	2	0,2	0,2	0,4	300							2	-0,2	0,8	-0,4	300
7	3	0,3	0,4	0,1	500							3	-0,3	-0,4	0,9	500
8																
9	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	x1	0,0	111,1	317,9	431,1	510,7	563,3	598,3	621,7	637,2	647,6	654,6	659,2	662,3	664,3	665,7
11	x2	0,0	375,0	680,6	834,1	964,8	1037,7	1093,1	1126,8	1150,8	1166,1	1176,6	1183,5	1188,1	1191,2	1193,3
12	x3	0,0	555,6	759,3	964,0	1070,0	1154,6	1204,5	1240,8	1263,6	1279,4	1289,7	1296,7	1301,3	1304,4	1306,4
13	Точность		нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	да	да	да

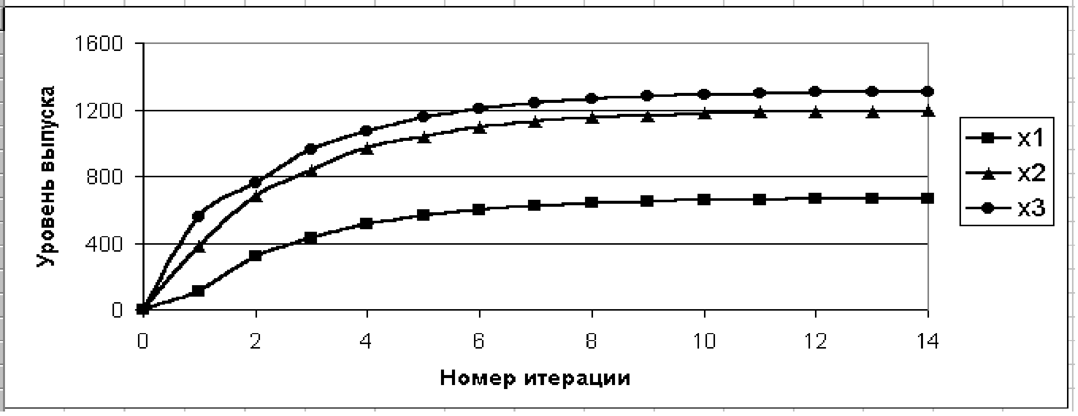


Рис. 3.22. Решение задачи межотраслевого баланса

4. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1. Постановка задачи оптимизации

Поскольку для достижения цели практически всегда существует несколько путей (имеется ряд вариантов), необходимо выбрать наиболее из оптимальных вариантов. Необходимость принятия решения о наиболее целесообразной линии поведения составляет суть оптимального управления. Для того, чтобы использовать количественные методы оптимизации для управления фирмой, необходимо установить границы подлежащей оптимизации системы, определить качественный критерий, на основании которого можно провести анализ вариантов с целью выявления наилучшего, осуществить выбор переменных, которые используются для определения характеристик, и, наконец, построить модель, отражающую взаимосвязи между переменными. Эта последовательность действий составляет содержание процесса постановки задачи оптимизации.

Границы системы задаются пределами, отделяющими фирму от внешнего рынка. При анализе какого-либо параметра иногда пренебрегают влиянием других параметров, а также их взаимозависимостью.

Характеристический критерий позволяет оценить характеристики системы и определить наилучшие условия ее функционирования. Отметим, что независимо от выбора метода оптимизации на каждом этапе исследования объекта только один критерий может использоваться при определении оптимума. Действительно, невозможно, например, получить решение, которое одновременно обеспечивает минимум затрат, максимум прибыли и минимум рисков. Обычно один из критериев выбирается в качестве первичного и служит характеристической мерой в задаче оптимизации. Другие, вторичные критерии порождают ограничения, которые устанавливают диапазоны изменения соответствующих показателей от минимального до максимально приемлемого значения.

На третьем этапе постановки задачи оптимизации осуществляется выбор *независимых переменных*, которые должны адекватно описывать допустимые условия функционирования системы.

После того, как характеристический критерий и независимые переменные выбраны, необходимо построить *модель системы*, которая описывает взаимосвязи между переменными задачи и отражает влияние независимых переменных на степень достижения цели, определяемой характеристическим критерием. Модель представляет собой некоторый набор уравнений и неравенств, который определяет взаимосвязь между переменными системы и ограничивает область их допустимых изменений.

В процессе решения задачи оптимизации обычно необходимо найти оптимальное значение некоторых параметров, определяющих данную задачу. Они называются *проектными параметрами* или *параметрами плана*. Выбор оптимального решения производится с помощью некоторой зависимой величины – *целевой функции*. Эту функцию можно представить в виде:

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – проектные параметры. Существуют методы решения задач оптимизации для функции одной и нескольких переменных. *Безусловная задача оптимизации* – отыскание минимума или максимума целевой функции и определение соответствующих значений аргументов. При формулировании *условной задачи оптимизации* (задача с ограничениями) задаются некоторые условия (ограничения) с совокупностью некоторых функций, удовлетворяющих уравнениям или неравенствам.

В задачах одномерной оптимизации оптимальное решение получает обычно на основе *методов поиска*, которые ориентированы на нахождение точки оптимума в заданном интервале. Эти методы основаны на процедуре простого сравнения значений функции в двух пробных точках. Наиболее предпочтительным здесь оказывается *метод золотого сечения*, основанный на симметричном расположении каждых двух пробных точек относительно границ интервала поиска. В многомерных задачах оптимизации поиск осуществляется с использованием координатных и градиентных методов. В методе *покоординатного спуска* поочередно осуществляется оптимизация по одному из проектных параметров (значения других в это время фиксируются). В методе *градиентного спуска* путь оптимизации выбирается в направлении, противоположном направлению градиента целевой функции.

В задачах *линейного программирования* ограничения представляются в виде равенств или неравенств, а целевая функция линейна. Модели линейного программирования позволяют просто получать численные решения и широко применяются в разных областях. Чаще всего здесь используется *симплекс-метод*. Задачи с нелинейной целевой функции и линейными ограничениями иногда называют задачами *нелинейного программирования с линейными ограничениями*. При их решении используют линеаризацию целевой функции с последующим применением методов линейного программирования.

Теория оптимального управления предполагает наличие *регулирования* – сохранения значений переменных процессов близкими к заданным вне зависимости от возмущений и колебаний в его динамике.

В более общей постановке задачи оптимизации можно отнести к предмету *исследования операций.* Типичная ситуация такова: организуется какое-либо мероприятие, которое можно осуществить тем или иным способом, то есть выбрать решение из ряда возможных вариантов. *Операцией* называют комплекс мероприятий, объединенных общим замыслом и направленных на достижение поставленной цели. Операция является управляемым мероприятием.

В зависимости от того, какой информацией обладает руководитель и его сотрудники, подготавливающие решения, условия принятия решений меняются и изменяются математический методы, применяемые для выработки рекомендаций. Если известны все действующие в системе факторы и отсутствуют случайные воздействия, то это будет *принятие решений в условиях определенности.*

Когда решение может привести не к определенному исходу, а к одному из множества возможных с разными вероятностями их осуществления, то принимающий решение рискует получить не тот результат, на который он рассчитывает. Поскольку исход каждой конкретной реализации случаен и поэтому заранее точно не предсказуем, метод называют *принятием решений в условиях риска*.

Если же исход операции зависит не только от стратегии, избранной руководителем, но и от ряда факторов, не известных в момент принятия решения, например погодных условий, действий, которые предпринимает конкурент, то такая задача называется *принятием решений в условиях неопределенности*. Одним из методов обоснования решений в условиях неопределенности является математическая *теория игр.*

4.2. Круг решаемых задач

В настоящее время множество задач планирования и управления в отраслях народного хозяйства, а также большой объем частных прикладных задач решаются методами математического программирования. Наиболее развитыми в области решения оптимизационных задач являются методы линейного программирования. Эти методы позволяют описать с достаточной точностью широкий круг задач коммерческой деятельности, таких, как:

- планирование товарооборота;
- размещение розничной торговой сети города;
- планирование товароснабжения города, района;
- прикрепление торговых предприятий к поставщикам;
- организация рациональных перевозок товаров (транспортная задача);
- распределение работников торговли по должностям (задача о назначе-

нии);

- организация рациональных закупок продуктов питания (задача о диете); распределение ресурсов;
- планирование капиталовложений;
- оптимизация межотраслевых связей;
- замена торгового оборудования;
- определение оптимального ассортимента товаров в условиях ограниченной площади;
- установление рационального режима работы.

В задачах *линейного программирования* критерий эффективности и функции в системе ограничений линейны. Если содержательный смысл требует получения решения в целых числах, то такая задача является задачей *целочисленного программирования.* Если в задаче математического программирования имеется переменная времени, а критерий эффективности выражается через уравнения, описывающие течение операций во времени, то такая задача является задачей *динамического программирования.*

4.3. Общая задача линейного программирования

Постановка задачи коммерческой деятельности может быть представлена в виде математической модели линейного программирования, если целевая функция может быть представлена в виде линейной формы, а связь с ограниченными ресурсами описать посредством линейных уравнений или неравенств. Кроме того, вводится дополнительное ограничение – значения переменных должны быть неотрицательны, поскольку они представляют такие величины, как товарооборот, время работы, затраты и другие экономические показатели.

В целом экономико-математическая формулировка и модель общей задачи линейного программирования имеют следующий вид: найти максимальное (минимальное) значение линейной целевой функции

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при условиях-ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, k; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{k+1, m}, k \le m; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1, l}, l \le n, \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины.

Запишем в основной задаче линейного программирования ограничение в векторной форме:

$$x_1 \overline{A_1} + x_2 \overline{A_2} + \ldots + x_n \overline{A_n} = \overline{B},$$

где $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}; \overline{B}$ – m-мерные векторы-столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений задачи.

План $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *опорным планом* основной задачи линейного программирования, если система векторов $\overline{A_j}$, входящих в данное разложение с положительными коэффициентами x_j, линейно независима.

Так как векторы $\overline{A_j}$ являются m-мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может превышать m.

Опорный план называется *невырожденным*, если он содержит ровно m положительных компонент. Если в опорном плане число положительных компонент меньше m, то план является *вырожденным*.

4.4. Постановка задач коммерческой деятельности

Рассмотрим примеры преобразования задач коммерческой деятельности к общей задаче линейного программирования и построения экономико-математических моделей.

1. Задача использования сырья. Для изготовления двух видов продукции $П_1$ и $П_2$ используется три вида сырья: c_1, c_2 и c_3. Запасы сырья на складе и количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Виды сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья на изготовление единицы продукции	
		$П_1$	$П_2$
c_1	20	2	5
c_2	40	8	5
c_3	30	5	6

Прибыль от реализации единицы продукции $П_1$ составляет 50 руб., а продукции $П_2$ – 40 руб. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Обозначим через x_1 количество единиц продукции $П_1$, а через x_2 – количество единиц продукции $П_2$. Тогда получим систему ограничений:

$$2x_1 + 5x_2 \le 20;\ 8x_1 + 5x_2 \le 40;\ 5x_1 + 6x_2 \le 30,$$

которая показывает, что количество сырья, расходуемое на изготовление продукции, не может превысить имеющихся запасов. Конечную цель решаемой задачи - получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2. Реализация x_1 единиц продукции $П_1$ дает прибыль $50x_1$, а реализация x_2 единиц продукции $П_2$ дает $40x_2$ руб. прибыли.

Суммарная прибыль

$$L = 50x_1 + 40x_2.$$

Необходимо найти такие неотрицательные значения x_1 и x_2, при которых функция L достигает максимума. Условиями не оговорена неделимость единицы продукции, поэтому x_1 и x_2 могут быть и дробными числами.

2. Задача о составлении пищевого рациона. В коммерческой деятельности возникают задачи, связанные с осуществлением рациональных закупок продуктов, обеспечивающих необходимый рацион питания для поддержания нормальной жизнедеятельности человека, или формирование диетического питания в больницах, или задачи составления кормовых смесей на животноводческих фермах. Задачи о рациональном питании решаются в условиях ограниченного ассортимента, товарных запасов, стоимости, суточных норм потребления питательных веществ и их содержания в продуктах. Причем из всех возможных вариантов необходимо выбрать самый дешевый.

Рассмотрим пример. Сельскохозяйственное предприятие на промышленной основе производит откорм бычков (или свиней, уток и т.д.). Для простоты допустим, что имеется два вида продуктов $П_1$ и $П_2$. При откорме каждое животное должно ежедневно получать не менее 9 ед. питательного вещества C_1, не менее 8 ед. вещества C_2 и не менее 12 ед. вещества C_3. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида продуктов приведено в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Питательные вещества	Корм $П_1$	Корм $П_2$
C_1	3	1
C_2	1	2
C_3	1	6

Требуется составить такой пищевой рацион, чтобы заданные условия по содержанию смеси основных питательных веществ были выполнены, но при этом стоимость рациона была минимальна. Для составления математической модели обозначим через x_1 и x_2 количество килограммов корма $П_1$ и $П_2$ в дневном рационе. Получим следующую систему ограничений:

$$3x_1 + x_2 \geq 9;\ x_1 + 2x_2 \geq 8;\ x_1 + 6x_2 \geq 12.$$

Если корм $П_1$ стоит 40 руб., а корм $П_2$ – 60 руб., то общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции

$$L = 40x_1 + 60x_2.$$

Поставленная задача сводиться к следующему: выбрать такие неотрицательные значения переменных x_1 и x_2, удовлетворяющее линейным неравенствам, при которых линейная функция L этих переменных принимает минимальное значение.

3. Планирование товарооборота. Коммерческое предприятие реализует товары нескольких групп: $A_j\,(j = \overline{1,n})$. Для реализации этих товаров используются ресурсы с ограниченным объемом: b_1 – рабочее время (чел.-ч); b_2 – площадь залов (м^2); b_3 – издержки обращения (руб.). Известны нормы расхода каждого вида ресурса на реализацию единицы j-й группы товара – $a_{ij}, (i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,n})$. Доход от продажи в расчете на единицу товара составляет c_j.

Необходимо составить оптимальный план товарооборота по критерию максимума дохода (или по другому критерию – минимум издержек обращения).

Построим экономико-математическую модель задачи. Известно, что величина дохода линейно связана с объемом продажи товаров x_j. В связи с этим целевую функцию можно записать в виде

$$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max.$$

Очевидно, что объем продажи товаров не может быть отрицательной величиной. Поэтому $x_j \geq 0$, $j = 1, n$. Учитывая нормы затрат ресурсов и их объемы, запишем ограничения в виде системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \le b_1, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \le b_2, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j \le b_3, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Решение задачи можно получить с помощью симплексного метода.

4. Производственная задача. Предприятие изготавливает несколько видов продукции, расходуя на это изготовление различные виды сырья. Запасы сырья ограничены. Доход, получаемый от реализации каждого вида продукции, различен. Необходимо составить такой план выпуска продукции, при котором доход предприятия был бы максимальным.

Для изготовления n видов продукции P_j $(1 \le j \le n)$ используется m видов сырья S_j $(1 \le i \le n)$. Запасы сырья составляют b_j $(1 \le i \le m)$. Нормативы затрат сырья на изготовление единицы продукции, составляют a_{ij}. Доход, получаемый от реализации единицы продукции, составляет D_j, $(1 \le j \le n)$.

Необходимо составить такой план выпуска продукции, при котором доход от ее реализации будет максимальным. Построим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_j количество единиц продукции j-го вида, запланированных к производству. Тогда целевая функция будет иметь вид:

$$F\left(\overline{X}\right) = \sum_{j=1}^{n} D_j x_j \to \max.$$

Для изготовления всей продукции потребуется $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ единиц сырья i-го вида. Поскольку его количество ограничено величиной b_i, получаем неравенство:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = \overline{1,m}.$$

Учитывая нормативы затрат и ограничения на ресурсы, запишем систему неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \le b_1, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \le b_2, \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \le b_n, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Решение модели можно получить, например, с помощью симплекс-метода.

5. Перевозка грузов. В современных условиях большие транспортные расходы связаны с простоями в ожидании обслуживания на погрузочно-разгрузочных работах, порожними пробегами, встречными и нерациональными перевозками, затратами на бензин» техническое обслуживание и заработную плату водителей. В связи с этим необходимо решать задачи оптимального планирования перевозок грузов в коммерческой деятельности из пунктов отправления (баз, станций, фабрик, совхозов, заводов) в пункты назначения (магазины, склады) методами, позволяющими оптимизировать план по какому-либо экономическому показателю, например финансовых затрат или времени на перевозку грузов.

Для решения подобного рода задач существует в линейном программировании специально разработанные методы, а задачи такого рода называются транспортными задачами.

Пусть имеется т пунктов отправления (поставщиков) грузов:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_m,$$

на которых сосредоточены запасы какого-либо однородного груза в объемах соответственно:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_m,$$

Величины a_i, определяют максимально возможные размеры вывоза груза с пунктов отправления. Суммарный запас груза поставщиков составляет $\sum_{i=1}^{m} a_i$. Кроме того, имеется n пунктов назначения:

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_j, \ldots, B_n,$$

которые подали заявки на поставку грузов в объемах соответственно:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_j, \ldots, b_n,$$

Суммарная величина заявок составляет $\sum_{j=1}^{n} b_i$. Стоимость перевозки одной единицы груза от поставщика A_i к потребителю B_j обозначим через c_{ij} (транспортный тариф). Общая стоимость перевозок составляет матрицу транспортных издержек C. В качестве критерия оптимальности выбираем суммарные издержки по перевозке грузов.

Тогда транспортная задача формулируется следующим образом: необходимо составить оптимальный план, т. е. найти такие значения объема перевозок грузов $\| x_{ij} \|$ от поставщиков A_i , к потребителям B_j, чтобы вывести все грузы от поставщиков, удовлетворить заявки каждого потребителя и обеспечить минимальные транспортные расходы на перевозку груза.

Задача заключается в определении плана перевозок – матрицы X, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

и обеспечивает минимальное значение целевой функции

$$F(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min .$$

6. Распределение по должностям. В коммерческой сфере возникают задачи, связанные с рациональным распределением работников или механизмов по отдельным видам работ, должностям или операциям. Известно, что один и тот же работник может выполнить различные функции с разной Производительностью в зависимости от опыта работы, квалификации, индивидуальных особенностей. Поэтому возникает задача о назначениях, предполагающая такое распределение работников, при котором производительность труда в коллективе была бы максимальной.

Приведем построение экономико-математической модели задачи. На коммерческом предприятии имеется m работников:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_m,$$

каждый из которых должен выполнять одну B_j из имеющихся n видов работ:

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_j, \ldots, B_n.$$

Для каждого работника A_i на рабочем месте B_j известна производительность труда c_{ij}. Необходимо определить, кого и на какую работу следует назначить, чтобы добиться максимальной суммарной производительности при условии, что каждый работник может быть назначен только на одну работу.

Обозначим x_{ij} назначение i-го работника на j-ю работу. Так как количество работников равно количеству работ, то x_{ij} может принимать только два значения: 1, если i-й работник назначен на выполнение j-й работы; 0, если не назначен. При назначении i-го работника на j-ю работу производительность равна $c_{ij}x_{ij}$. Следовательно, необходимо найти матрицу распределения по должностям X, которая обеспечивает максимальное значение линейной функции

$$F(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n}, \\ x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Умножая линейную функцию на «–1» приводим задачу к транспортной, в которой объем запасов каждого поставщика и объем потребностей каждого потребителя равны единице.

7. Построение кольцевых маршрутов. Коммерческая деятельность обычно связана с командировками, поездками по городам для заключения сделок. Расстояние между любой парой множества из n городов известны и составляют a_{ij} $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\ i \ne j\right)$. Если прямого маршрута между городами i и j не существует, то допускают, что $a_{ij} = \infty$.

Коммерсант, выезжая из какого-либо города, должен посетить все города, побывав в каждом из них один и только один раз, и вернуться в исходный город. Необходимо определить такую последовательность объезда городов, при которой длина маршрута была бы наименьшей.

Экономико-математическая постановка этой задачи может быть представлена как задача целочисленного линейного программирования. Переменные определим следующим образом: $x_{ij} = 1$, если коммивояжер переезжает из города i в город j; в противном случае $x_{ij} = 0$.

Задача заключается в определении матрицы целых неотрицательных значений переменных x_{ij}, минимизирующих целевую функцию вида:

$$F(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

при ограничениях;

1) для въезда в город j только один раз:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1;$$

2) для выезда из города i только один раз:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1.$$

В такой постановке задача коммивояжера представляет собой задачу целочисленного линейного программирования. Действительно, условия $a_{ij} = \infty$ исключают в оптимальном решении значения $x_{ij} = 1$ как не имеющие смысла, а ограничения требуют:

1) чтобы маршрут включал только один въезд в каждый город;
2) чтобы маршрут включал лишь один выезд из каждого города, а целевая функция включала длину маршрута коммивояжера;
3) чтобы маршрут образовывал контур и проходил через все города.

Таким образом, формируется экономный вариант маршрута в виде кольца. Решение этой задачи строится, например, методом ветвей и границ целочисленного программирования.

4.5. Методы решения задач линейного программирования

Задачи линейного программирования решаются различными методами, простейшим из которых является графический метод, который применим при наличии не более двух независимых переменных.

Свойства основной задачи линейного программирования связаны со свойствами выпуклых множеств.

Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и их произвольную выпуклую комбинацию.

Геометрический смысл этого определения состоит в том, что множеству вместе с его произвольными точками полностью принадлежит и прямолинейный отрезок, их соединяющий. Примерами выпуклых множеств являются прямолинейный отрезок, полуплоскость, круг, шар, куб, полупространство и др.

Угловыми точками выпуклого множества называются точки, не являющиеся выпуклой комбинацией двух произвольных точек множества. Например, угловыми точками треугольника являются его вершины, круга – точки окружности, которые его ограничивают.

Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто). Непустое множество планов называется многогранником решений, а всякая угловая точка многогранника решений – вершиной.

Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то целевая функция задачи принимает максимальное значение в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение достигается более чем в одной вершине, то целевая функция принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник, каждая вершина которого определяет опорный план. Для одного из опорных планов (т. е. в одной из вершин многогранника решений) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов).

Вершину многогранника решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение. Можно найти достаточно просто, если задача в стандартной форме содержит не более двух переменных:

$$F\left(\overline{X}\right) = (c_1 x_1 + c_2 x_2) \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, i = \overline{1,k}; \\ x_j \ge 0, j = 1,2. \end{cases}$$

Каждое из неравенств системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость допустимых значений переменных соответственно с граничными прямыми

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, i = \overline{1,k}; x_2 = 0.$$

Если система неравенств совместна, то областью допустимых решений задачи являются выпуклое множество, которое называется многоугольником решений. Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

Решение задачи линейного программирования геометрическим методом включает следующие этапы.

1. На плоскости X_1OX_2 строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Строят многоугольник решений.

4. Строят вектор $\overline{N}(c_1, c_2)$, который указывает направление возрастания целевой функции.

5. Строят начальную прямую целевой функции $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ и затем передвигают ее в направлении вектора $\overline{N}$ до крайней угловой точки многоугольника решений. В результате находят точку, в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо множество точек с одинаковым максимальным значением целевой функции, если начальная прямая сливается с одной из сторон многоугольника решений, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов $\left(F\left(\overline{X}\right) \to \infty\right)$.

6. Определяют координаты точки максимум функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Минимальное значение линейной функции цели находится путем передвижения начальной прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ в направлении, противоположном вектору $\overline{N}(c_1, c_2)$.

Рассмотрим применение графического метода на примере задачи планирования производства.

Компания производит два типа холодильников. Обе модели приносят прибыль, причем модель *A* – 70 дол. за каждый холодильник, а модель *B* – соответственно 60 дол. Для производства модели *A* требуется 3 человеко-часа, а модели *B* – 2 человеко-часа. Общее количество человеко-часов не должно превышать 3000 в неделю. Далее, стоимость сырья для модели *A* составляет 50 долл., а для модели *B* – 60 дол. Потолок недельной сметы по сырью для этих двух моделей составляет 75000 дол. Компания ставит своей целью максимизацию прибыли.

Обозначим за x и y соответственно количество моделей холодильников типа *A* и *B*, произведенных за неделю. Общее количество человеко-часов, необходимое для производства двух моделей, составляет $3x + 2y$. Общие затраты составят $50x + 60y$. Имеем систему ограничений:

$$3x + 2y \le 3000; \quad 50x + 60y \le 75000.$$

Задача заключается в максимизации функции прибыли

$$L = 70x + 60y.$$

Первое, что необходимо сделать при графическом решении задачи, это отобразить ограничения. Заштрихованная на рисунке область – это область допустимых решений задачи (рис. 4.1). Теперь можно взять любую точку из области допустимых решений и вычислить соответствующую прибыль. Например, в точке $x = 500$, $y = 500$ прибыль составит 70×500 + 60×500 = 65000 дол. Уравнение целевой функции $70x + 60y = k$ – это семейство параллельных прямых, которое можно нанести на график (пунктир). Максимальная прибыль будет в точке пересечения прямой прибыли с прямыми ограничений. При этом из графика находим $x = 375$, $y = 937$. Таким образом, фирма должна выпускать 375 холодильников типа *A* и 937 холодильников типа *B*. Максимальная прибыль компании составляет 70×375 + 60×937 = 82470 дол. в неделю.

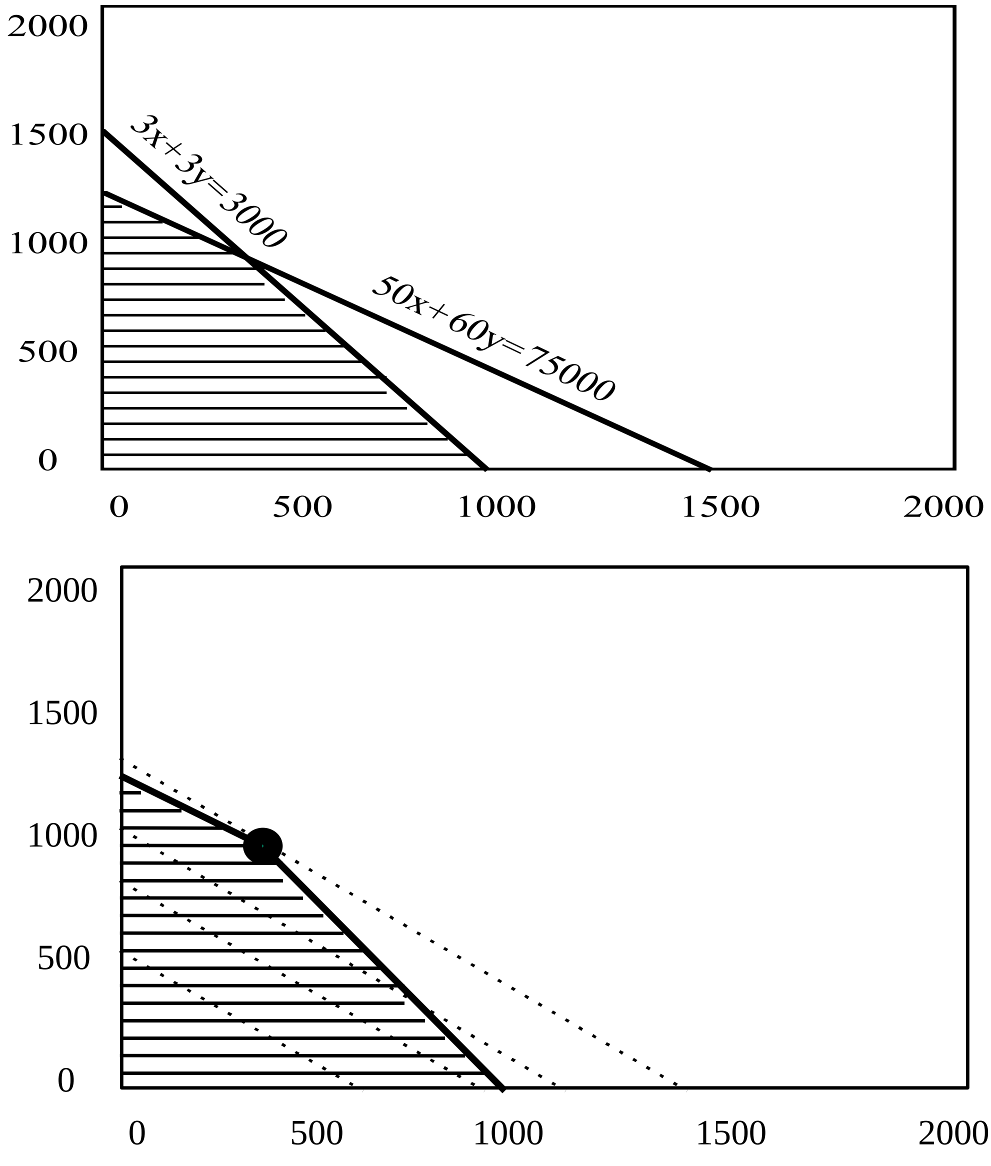


Рис. 4.1. Пример графического решения задачи линейного программирования

Заметим, что при решении задач линейного программирования существует ряд потенциальных трудностей. Основные из них:

- неразрешимость – ситуация, когда у задачи нет решения;
- множественность решений – в этом случае имеется несколько возможных решений, которые дают оптимальные значения целевой функции;
- безграничность – ситуация, когда у оптимального значения нет предела;
- если число переменных более двух, то графический метод не применим, в этой ситуации необходимо использовать более сложные количественные методы, самым распространенным из которых является симплекс-метод.

Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцингом в 1949 г., однако, еще в 1939 г. идеи метода были разработаны российским математиком Л.В. Канторовичем. Симплексный метод – это итерационный процесс, который начинается с одного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области возможных решений до тех пор, пока не достигнет оптимального значения, в частности, по угловым точкам многоугольника решений, полученного геометрическим методом.

Симплексный метод основан на последовательном переходе от одного опорного плана задачи линейного программирования к другому, при этом значение целевой функции изменяется.

5. МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимостей между характером потока заявок, числом каналов обслуживания, производительностью отдельного канала и эффективным обслуживанием с целью нахождения наилучших путей управления этими процессами. Задачи теории массового обслуживания носят оптимизационный характер и в конечном итоге включают экономический аспект по определению такого варианта системы, при котором будет обеспечен минимум суммарных затрат от ожидания обслуживания, потерь времени и ресурсов на обслуживание и от простоев каналов обслуживания.

5.1. Потоки событий

Переходы СМО из одного состояния в другое происходят под воздействием вполне определенных событий – поступление заявок и их обслуживания. Последовательность появления событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени, формирует так называемый поток событий. Примерами являются потоки различной природы – товаров, денег, документов, транспорта, клиентов, покупателей, телефонных звонков, переговоров. Поведение темы обычно определяется не одним, а сразу несколькими потоками событий. Например, обслуживание покупателей в магазине определяется потоком покупателей и потоком обслуживания. В этих потоках случайными являются моменты появления покупателей, время ожидания в очереди и время, затрачиваемое на обслуживание каждого покупателя. При этом основной характерной чертой потоков является вероятностное распределение времени между соседними событиями.

Поток событий называется регулярным, если в нем события следуют одно за другим через заранее заданные и строго определенные промежутки времени. Такой поток является идеальным и очень редко встречается на практике. Чаще встречаются нерегулярные потоки, не обладающие свойством регулярности.

Поток событий называется стационарным, если вероятность попадания любого числа событий на промежуток времени зависит только от длины этого промежутка и не зависит от того, как далеко расположен этот промежуток от начала отсчета времени. На практике обычно потоки могут считаться стационарными только на некотором ограниченном промежутке времени.

Поток событий называется потоком без последствия, если число событий, попадающих на один из произвольно выбранных промежутков времени, не зависит от числа событий, попавших на другой, также произвольно выбранный промежуток при условии, что эти промежутки не пересекаются между собой. Например, поток покупателей, входящих в магазин, можно считать потоком без последствия потому, что причины, обусловившие приход каждого из них, не связаны с аналогичными причинами для других покупателей.

Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания на очень малый отрезок времени сразу двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания только одного события. В ординарном потоке события происходят поодиночке, а не по два или более сразу.

Если поток одновременно обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствием последствия, то такой поток называется простейшим (или пуассоновским) потоком событий. Математическое описание воздействия такого потока на системы оказывается наиболее простым.

Рассмотрим на оси времени некоторый промежуток времени τ. Допустим, вероятность попадания случайного события на этот промежуток p, а полное число возможных событий – n. При наличии свойства ординарности потока событий вероятность p должна быть достаточно малой величиной, n – достаточно большим числом, поскольку рассматриваются массовые явления. В этих условиях для вычисления вероятности попадания на промежуток времени τ некоторого числа событий m можно воспользоваться формулой Пуассона.

$$P_{m,n} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, (m = \overline{0,n}),$$

где величина $a = np$ – среднее число событий, попадающих на промежуток времени τ, которое можно определить через интенсивность потока событий λ следующим образом: $a = \lambda\tau$.

Размерность интенсивности потока λ есть среднее число событий в единицу времени. Между n, p и λ имеется следующая связь:

$$n = \lambda t; p = \frac{\tau}{t},$$

где t – весь промежуток времени, на котором рассматривается действие потока событий.

Необходимо определить распределение интервала времени T между событиями в таком потоке. Поскольку это случайная величина, найдем ее функцию распределения. Как известно из теории вероятностей, интегральная функция распределения $F(t)$ есть вероятность того, что величина T будет меньше времени t:

$$F(t) = P(T < t).$$

По условию в течение времени T не должно произойти ни одного события, а на интервале времени t должно появиться хотя бы одно событие. Эта вероятность вычисляется с помощью вероятности противоположного события на промежутке времени (0; t), куда не попало ни одного события, т.е. $m = 0$, тогда

$$F(t) = 1 - P_0 = 1 - \frac{a^0}{0!}e^{-a} = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

Плотность распределения промежутка времени между двумя последовательными событиями получим, продифференцировав $F(t)$ по времени:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

Пользуясь полученной функцией плотности распределения, можно получить числовые характеристики случайной величины T: математическое ожидание $M(T)$, дисперсию $D(T)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(T)$:

$$M(T) = \lambda \int_0^{\infty} te^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}; \quad D(T) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, для простейшего потока математическое ожидание интервала времени между соседними событиями равно его среднеквадратическому отклонению. В этом случае вероятность того, что число заявок, поступающих на обслуживание за промежуток времени t, равно k, определяется по закону Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где λ – интенсивность поступления потока заявок, среднее число событий в СМО за единицу времени.

Для такого потока заявок время между двумя соседними заявками T распределено экспоненциально с плотностью вероятности:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Случайное время ожидания в очереди начала обслуживания $t_{оч}$ тоже можно считать распределенным экспоненциально:

$$f(t_{оч}) = \nu e^{-\nu t_{оч}},$$

где ν – интенсивность потока прохода очереди, определяемая средним числом заявок, проходящих на обслуживание в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T_{оч}},$$

$T_{оч}$ – среднее время ожидания обслуживания в очереди.

Выходной поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $t_{обс}$ является тоже случайной величиной и подчиняется во многих случаях показательному закону распределения с плотностью вероятности:

$$f(t_{обс}) = \mu\nu e^{-\mu t_{обс}},$$

где μ – интенсивность потока обслуживания, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t_{обс}}},\ \overline{t_{обс}}$$ – среднее время обслуживания заявок.

Важной характеристикой СМО, объединяющей показатели λ и μ, является интенсивность нагрузки: $\rho = \lambda/\mu$, которая показывает степень согласования входного и выходного потоков заявок канала обслуживания и определяет устойчивость системы массового обслуживания.

5.2. Графы состояний СМО

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно пользоваться вариантом схематичного изображения возможных состояний СМО на рисунке в виде графа с разметкой его возможных фиксированных состояний. Состояния СМО изображаются обычно либо прямоугольниками, либо кружками, а возможные направления переходов из одного состояния в другое ориентированы стрелками, соединяющими эти состояния. Например, размеченный граф состояний одноканальной системы случайного процесса обслуживания в газетном киоске приведен на рис. 5.1.

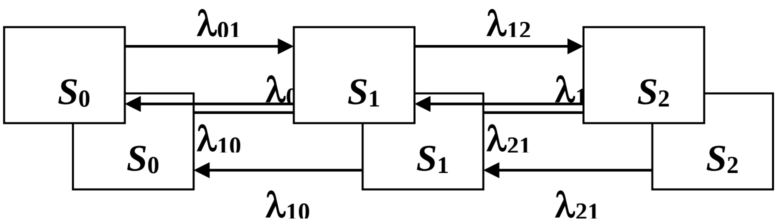


Рис. 5.1. Размеченный граф состояний СМО

Система может находиться в одном из трех состояний: S_0 – канал свободен, простаивает, S_1 – канал занят обслуживанием, S_2 – канал занят обслуживанием и одна заявка в очереди. Переход системы из состояния S_0 в S_1 происходит под воздействием простейшего потока заявок интенсивностью λ_{01}, а из состояния S_1 в состояние S_0 систему переводит поток обслуживания с интенсивностью λ_{10}. Граф состояний системы обслуживания с проставленными интенсивностями потоков у стрелок называется размеченным. Поскольку пребывание системы в том или ином состоянии носит вероятностный характер, то вероятность p_i(t) того, что система будет находиться в состоянии S_i в момент времени t, называется вероятностью i-го состояния СМО и определяется числом поступивших заявок k на обслуживание.

Случайный процесс, происходящий в системе, заключается в том, что в случайные моменты времени t_0, t_1, t_2,..., t_k, ..., t_n система оказывается в том или другом заранее известном дискретном состоянии последовательно. Такая случайная последовательность событий называется марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из одного состояния S_i любое другое S_j, не зависит от того, когда и как система перешла в состояние S_i. Описывается марковская цепь с помощью вероятности состояний, причем они образуют полную группу событий, поэтому их сумма равна единице. Если вероятность перехода не зависит от номера k, то марковская цепь называется однородной. Зная начальное состояние системы обслуживания, можно найти вероятности состояний для любого значения k – числа заявок, поступивших на обслуживание.

5.3. Уравнения Колмогорова

Переход СМО из одного состояния в другое происходит случайным образом и представляет собой случайный процесс. Работа СМО – случайный процесс с дискретными состояниями, поскольку его возможные состояния во времени можно заранее перечислить. Причем переход из одного состояния в другое происходит скачкообразно, в случайные моменты времени, поэтому он называется процессом с непрерывным временем. Таким образом, работа СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Для описания процессов с непрерывным временем используется модель в виде так называемой марковской цепи с дискретными состояниями системы, или непрерывной марковской цепью.

Рассмотрим математическое описание марковского случайного процесса с дискретными состояниями системы S_0, S_1, S_2 (см. рис. 5.1) и непрерывным временем. Полагаем, что все переходы системы массового обслуживания из состояния S_i в состояние S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij}, а обратный переход – под воздействием другого потока λ_{ji}. Введем обозначение p_i как вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_i,. Для любого момента времени t справедливо записать нормировочное условие – сумма вероятностей всех состояний равна единице

$$\sum_{i=0}^{2} p_i(t) = 1.$$

Проведем анализ системы в момент времени t, задав малое приращение времени Δt, и найдем вероятность $p_1(t + \Delta t)$ того, что система в момент времени $(t + \Delta t)$ будет, находиться в состоянии S_1, которое достигается разными вариантами:

а) система в момент t с вероятностью $p_1(t)$ находилась в состоянии S_1 и за малое приращение времени Δt так и не перешла в другое соседнее состояние – ни в S_0, ни в S_2. Вывести систему из состояния S_1 можно суммарным простейшим потоком с интенсивностью $(\lambda_{10} + \lambda_{12})$, поскольку суперпозиция простейших потоков также является простейшим потоком. На этом основании вероятность выхода из состояния S_1 за малый промежуток времени Δt приближенно равна $(\lambda_{10} + \lambda_{12})\Delta t$. Тогда вероятность невыхода из этого состояния равна $[1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})\Delta t]$. В соответствии с этим вероятность того, что система останется в состоянии S_1 на основании теоремы умножения вероятностей, равна:

$$p_1(t)\ [1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})\Delta t];$$

б) система находилась в соседнем состоянии S_0 и за малое время Δt перешла в состояние S_1. Переход системы происходит под воздействием потока λ_{01} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{01}\Delta t$. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_1, этом варианте равна $p_0(t)\ \lambda_{01}\Delta t$;

в) система находилась в состоянии S_2 и за время Δt перешла в состояние S_1 под воздействием потока интенсивностью λ_{21} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{21}\Delta t$. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_1, равна $p_2(t)\ \lambda_{21}\Delta t$.

Применяя теорему сложения вероятностей для этих вариантов, получим выражение:

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t)\left[1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})\Delta t\right] + p_0(t)\lambda_{01}\Delta t + p_2(t)\lambda_{21}\Delta t,$$

которое можно записать иначе:

$$\frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = p_0(t)\lambda_{01} + p_2(t)\lambda_{21} - p_1(t)(\lambda_{10} + \lambda_{12}).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, приближенные равенства перейдут в точные, и тогда получим производную первого порядка

$$\frac{dp_1}{dt} = p_0\lambda_{01} + p_2\lambda_{21} - p_1(\lambda_{10} + \lambda_{12}),$$

что является дифференциальным уравнением.

Проводя рассуждения аналогичным образом для всех других состояний системы, получим систему дифференциальных уравнений, которые называются уравнениями А. Н. Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = p_1\lambda_{10} - p_0\lambda_{01}, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = p_0\lambda_{01} + p_2\lambda_{21} - p_1(\lambda_{10} + \lambda_{12}), \\ \dfrac{dp_2}{dt} = p_1\lambda_{12} - p_2\lambda_{21}. \end{cases}$$

Поскольку предельные вероятности системы постоянны, то, заменив в уравнениях Колмогорова соответствующие производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим СМО. Для решения подобной системы необходимо добавить еще одно уравнение, определяющее нормировочное условие, поскольку сумма вероятностей всех состояний СМО равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_1(t) = 1.$$

5.4. Классификация систем массового обслуживания

Существующие варианты заявок, особенности их обслуживания и образования очередей, расположение, количество и организация каналов обслуживания послужили причиной появления большого разнообразия СМО. В целом классификационная структура включает следующие десять основных классификационных признаков:

- организация потока заявок;
- количество каналов обслуживания;
- характер образования очереди;
- ограничения на очередь;
- дисциплина очереди;
- характеристика каналов;
- расположение каналов;
- вид ограничений на очередь;
- правило отбора заявок;
- наличие и характеристика приоритета.

Рассмотрим наиболее существенные из приведенных классификационных признаков.

По числу каналов обслуживания СМО разделяются на одноканальные

n = 1 и многоканальные, для которых n = 2. В зависимости от взаимного расположения каналов системы подразделяются на СМО с параллельными и с последовательными каналами. В СМО с параллельными каналами входной поток заявок на обслуживание является общим, и поэтому заявки в очереди могут обслуживаться любым свободным каналом, например официантами в ресторане. В таких СМО очередь на обслуживание можно рассматривать как общую. В СМО с последовательным расположением каналов каждый канал может рассматриваться как отдельная одноканальная СМО или фаза обслуживания. В зависимости от характеристик каналов обслуживания многоканальные СМО подразделяются на СМО с однородными и неоднородными каналами.

СМО в зависимости от возможности образования очереди подразделяются на два основных типа: СМО с отказами обслуживания и СМО с ожиданием (очередью) обслуживания. В СМО с отказами возможен отказ в обслуживании, если все каналы уже заняты обслуживанием, а образовывать очередь и ожидать обслуживание нельзя.

В зависимости от организации потока заявок СМО подразделяются на разомкнутые и замкнутые. В разомкнутых СМО выходной поток обслуженных заявок не связан с входным потоком заявок на обслуживание и имеет неограниченный источник заявок. В замкнутых СМО обслуженные заявки в общем случае после некоторой временной задержки снова поступают на вход СМО.

5.5. Примеры модели систем массового обслуживания

5.5.1. Одноканальная СМО с отказами е обслуживании

Проведем анализ простой одноканальной СМО с отказами в обслуживании, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, а обслуживание происходит под действием пуассоновского потока с интенсивностью μ. Работу одноканальной СМО n = 1 можно представить в виде размеченного графа состояний рис. 5.2.

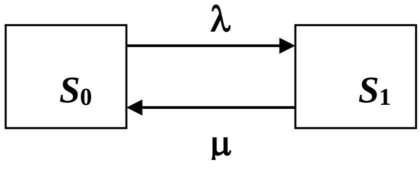


Рис. 5.2. Размеченный граф состояний одноканальной СМО: S_0 – канал обслуживания свободен; S_1 – канал занят обслуживанием

Переходы СМО из одного состояния S_0 в другое S_1 происходят под действием входного потока заявок с интенсивностью λ, а обратный переход – под действием потока обслуживания с интенсивностью μ.

Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояния:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = p_1\mu - p_0\lambda, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = p_0\lambda - p_1\mu, \\ p_0 + p_1 = 1. \end{cases}$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение для определения вероятности $p_0(t)$ состояния S_0:

$$\frac{dp_0}{dt} = -(\lambda + \mu)p_0 + \mu.$$

Это уравнение можно решить при начальных условиях в предположении, что система в момент $t = 0$ находилась в состоянии S_0, тогда $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$. В этом случае решение дифференциального уравнения позволяет определить вероятность того, что канал свободен и не занят обслуживанием:

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Тогда нетрудно получить выражение для определения вероятности занятости канала:

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Вероятность $p_0(t)$ уменьшается с течением времени и в пределе при $t \to \infty$ стремится к величине

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

а вероятность $p_1(t)$ в то же время увеличивается от 0, стремясь в пределе при $t \to \infty$ к величине

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Эти пределы вероятностей могут быть получены непосредственно из уравнений Колмогорова при условии

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \frac{dp_1(t)}{dt} = 0.$$

Функции $p_0(t)$ и $p_1(t)$ определяют переходный процесс в одноканальной СМО и описывают процесс экспоненциального приближения СМО к своему предельному состоянию с постоянной времени $\tau = \dfrac{1}{\lambda + \mu}$, характерной для рассматриваемой системы.

Вероятность $p_0(t)$ определяет относительную пропускную способность СМО, которая определяет долю обслуживаемых заявок по отношению к полному числу поступающих заявок, в единицу времени. Действительно, $p_0(t)$ есть вероятность того, что заявка, пришедшая в момент t, будет принята к обслуживанию. Всего в единицу времени приходит в среднем λ заявок и из них обслуживается λp_0 заявок. Тогда доля обслуживаемых заявок по отношению ко всему потоку заявок определяется величиной

$$Q = \frac{\lambda p_0(t)}{\lambda} = p_0(t).$$

В пределе при $t \to \infty$ значение относительной пропускной способности будет равно $Q = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Абсолютная пропускная способность, определяющая число заявок, обслуживаемых в единицу времени в пределе при $t \to \infty$, равна:

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} = \lambda Q.$$

Соответственно доля заявок, получивших отказ, составляет в этих же предельных условиях

$$P_{отк} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

а общее число необслуженных заявок равно $\dfrac{\lambda^2}{\lambda + \mu}$.

Пример. Статистическими исследованиями в результате наблюдения установлено, что интенсивность потока телефонных звонков коммерческому директору λ = 1,2 вызова в минуту, средняя продолжительность разговора (обслуживания заявки) $t_{обс}$ = 2,5 мин и все потоки событий (вызовов и обслуживания) имеют характер простейших пуассоновских потоков.

Требуется определить предельную (относительную и абсолютную) пропускную способность СМО, вероятность отказа, а также полное число обслуженных и необслуженных (получивших отказ) заявок в течение 1 ч работы СМО. Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, т.е. с пропускной, способностью, которой обладала бы система в том случае, если бы каждая заявка обслуживалась ровно 2,5 мин и все заявки следовали бы одна за другой без перерыва.

Размеченный граф состояний этой СМО приведен на рис. 5.2.

Интенсивность потока обслуживания (заявок в минуту) равна

$$\mu = 1/2{,}5 = 0{,}4 \text{ заявок/мин.}$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q = 0{,}3 \text{ (заявки в минуту);}$$

Вероятность занятости канала

$$p_1 = 1 - p_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 0{,}75.$$

Число заявок, обслуженных в течение часа, составляет: $60A = 18$ заявок, а получивших отказ – $60\lambda p_1 = 54$ заявки.

В этих же условиях номинальная производительность равна $Q_н = 60/2{,}5 = 24$ заявкам в час, т.е. фактическая производительность, учитывающая случайный характер процесса, происходящего в СМО, составляет только 75% = 18/24 × 100% от номинальной. Таким образом, СМО может обслуживать только 25% всех поступивших заявок. Очевидно, что работу такой СМО вряд ли можно считать удовлетворительной. Что же нужно сделать, чтобы повысить относительную пропускную способность одноканальной СМО. Этого можно добиться либо снижением интенсивности потока заявок λ, что по условию невозможно, либо увеличением интенсивности обслуживания μ, либо увеличением каналов обслуживания.

5.5.2. Многоканальная СМО с отказами в обслуживании

Рассмотрим многоканальную СМО с отказами в обслуживании на рис. 5.3, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ.

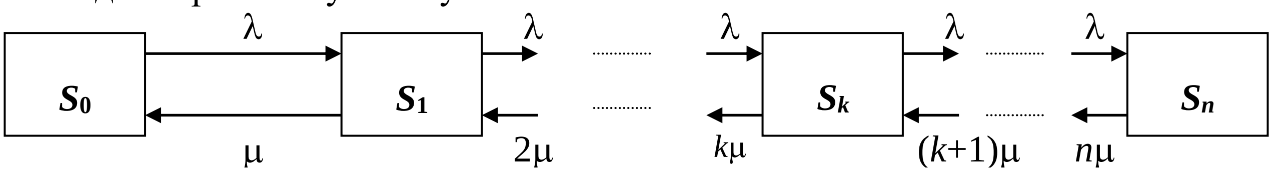


Рис. 5.3. Размеченный граф состояний многоканальной СМО с отказами

Поток обслуживания в каждом канале имеет интенсивность μ. По числу заявок СМО определяются ее состояния S_k, представленные в виде размеченного графа:

S_0 – все каналы свободны, $k = 0$,

S_1 – занят только один канал, $k = 1$,

S_2 – заняты только два канала, $k = 2$,

……………………………………….

S_k – заняты k каналов,

……………………………………….

S_n – заняты все n каналов, $k = n$.

Состояния многоканальной СМО меняются скачкообразно в случайные моменты времени. Переход из одного состояния, например S_0 в S_1 происходит под воздействием входного потока заявок с интенсивностью λ, а обратно – под воздействием потока обслуживания заявок с интенсивностью μ. Случайный процесс, протекающий в СМО, представляет собой частный случай процесса «рождения-гибели» и описывается системой дифференциальных уравнений Эрланга, которые позволяют получить выражения для предельных вероятностей состояния рассматриваемой системы, называемые формулами Эрланга:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right]^{-1}; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Вычислив все вероятности состояний n-канальной СМО с отказами p_0, p_1, p_2, …, p_k, …, p_n, можно найти характеристики системы обслуживания.

Вероятность отказа в обслуживании определяется вероятностью того, что поступившая заявка на обслуживание найдет все n каналов занятыми, система будет находиться в состоянии S_n:

$$p_{отк} = p_n = p_0 \frac{\rho^n}{n!}; \quad k = n.$$

В системах с отказами события отказа и обслуживания составляют полную группу событий, поэтому

$$p_{отк} + p_{обс} = 1.$$

На этом основании относительная пропускная способность определяется по формуле:

$$Q = p_{обс} = 1 - p_{отк} = 1 = p_n .$$

Абсолютную пропускную способность СМО можно определить по формуле:

$$A = \lambda\, p_{обс}.$$

Вероятность обслуживания, или доля обслуженных заявок, определяет относительную пропускную способность СМО, которая может быть определена и по другой формуле:

$$Q = p_{обс} = \frac{\bar{n}_з}{\rho}.$$

Из этого выражения можно определить среднее число заявок находящихся под обслуживанием или, что тоже самое, среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_з = \rho p_{обс} = \frac{A}{\mu}.$$

Коэффициент занятости каналов обслуживанием определяется отношением среднего числа занятых каналов к их общему числу:

$$K_з = \frac{\bar{n}_з}{n} = \frac{\rho}{n} p_{обс}.$$

Вероятность занятости каналов обслуживанием, которая учитывает среднее время занятости $\bar{t}_з$ и простоя $\bar{t}_{пр}$ каналов, определяется следующим образом:

$$p_з = \frac{\bar{t}_з}{\bar{t}_з + \bar{t}_{пр}}.$$

Из этого выражения можно определить среднее время простоя каналов:

$$\bar{t}_{пр} = \bar{t}_з \frac{1 - p_з}{p_з}.$$

Пример. Определим оптимальное число телефонных номеров, необходимых для установки на коммерческом предприятии при условии, что заявки на переговоры поступают с интенсивностью λ = 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону составляет $\bar{t}_з = \bar{t}_{обс} =$ 2 мин.

Вычислим показатели обслуживания для одноканальной СМО (n =1):

интенсивность обслуживания:

$$\mu = 1 / \bar{t}_{обс} = 30 \text{ заявок в час;}$$

интенсивность нагрузки:

$$\rho = \lambda / \mu = 3;$$

доля времени простоя каналов:

$$p_0 = \left[\sum_0^1 \frac{3^k}{k!}\right]^{-1} = \left[\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!}\right] = 0{,}25.$$

Следовательно, 25% в течение часа телефон будет не занят, $\bar{t}_{пр}$ = 15 мин.

Доля заявок, получивших отказ на переговорах, равна:

$$p_{отк} = 3^1/1! \times 0{,}25 = 0{,}75.$$

Значит, 75% из числа поступивших заявок не принимаются к обслуживанию.

Вероятность обслуживания поступающих заявок составит:

$$p_{обс} = 1 - p_{отк} = 0{,}25,$$

следовательно, 25% из числа поступивших заявок будут обслужены.

Среднее число каналов, занятых обслуживанием, равно:

$$\bar{n}_з = \rho p_{обс} = 3 \times 0{,}25 = 0{,}75.$$

Коэффициент занятости каналов обслуживанием

$$K_з = \frac{\bar{n}_з}{n} = \frac{0{,}75}{1} = 0{,}75.$$

Следовательно, телефон на 75% занят обслуживанием.

Абсолютная пропускная способность системы

$$A = \lambda\, p_{обс} = 90 \times 0{,}25 = 22{,}5 \text{ заявки в час.}$$

Очевидно, такая СМО с одним каналом будет плохо справляться с обслуживанием заявок, поскольку потеря поступающих на переговоры заявок составляет 75% – очень велика, а вероятность обслуживания – всего 25 %, кроме того, низка пропускная способность системы: только 22 заявки в час из 90 поступивших. Следовательно, необходимо увеличить число каналов. Для определения оптимальной величины проведем аналогичные вычисления для n = 2, 3, 4, 5, 6, а полученные результаты запишем в табл. 5.1.

Таблица 5.1

n	1	2	3	4	5	6
p_0	0,25	0,12	0,077	0,06	0,05	0,05
$p_{отк}$	0,75	0,54	0,35	0,21	0,1	0,05
$p_{обс}$	0,25	0,46	0,65	0,79	0,9	0,95
$n_з$	0.75	1,38	1,95	2,37	2,7	2,85
$K_з$	0,75	0,69	0.65	0,59	0,54	0,47
A	22,5	41,4	58,5	71,1	81	85,5

Как видно из таблицы, с ростом n эффективность СМО растет. Однако, при изменении критерия эффективности и введении дополнительных ограничений, например, по затратам на приобретение, установку и содержание телефонов, а также затрат на обеспечение сотрудников служебными переговорами, можно найти оптимальное число каналов.

5.5.3. Одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Рассмотрим простую одноканальную СМО с ограниченной очередью, в которой число мест в очереди m – фиксированная величина. Следовательно, заявка, поступившая в тот момент, когда все места в очереди заняты, не принимается к обслуживанию, не встает в очередь и покидает систему.

Граф этой СМО представлен на рис. 5.4.

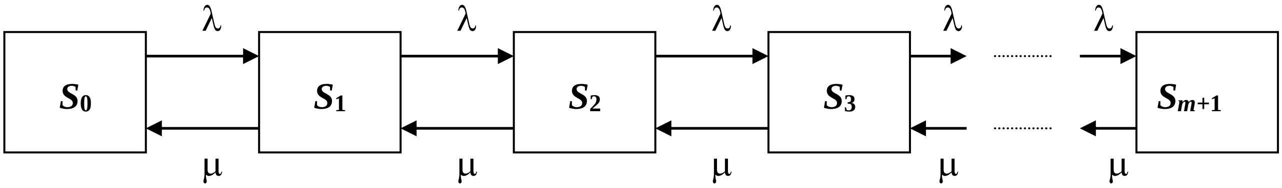


Рис. 5.4. Размеченный граф процесса «рождения-гибели»

Состояния СМО можно представить следующим образом:

S_0 – канал обслуживания свободен,

S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет,

S_2 – канал обслуживания занят, в очереди стоит одна заявка,

S_3 – канал обслуживания занят, в очереди стоят две заявки, ………………………………………….

S_{m+1} – канал обслуживания занят, в очереди все m мест заняты, любая следующая заявка получает отказ.

Для описания случайного процесса СМО можно воспользоваться изложенными ранее правилами и формулами. Напишем выражения, определяющие предельные вероятности состояний:

Выражение для p_0 можно в данном случае записать проще, пользуясь тем, что в знаменателе стоит геометрическая прогрессия относительно ρ, тогда после соответствующих преобразований получаем:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}.$$

Эта формула справедлива для всех ρ, отличных от 1, если же ρ = 1, то $p_0 = 1/(m+2)$, а все остальные вероятности также равны $1/(m+2)$.

Определим основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием: относительную и абсолютную пропускную способность, вероятность отказа, а также среднюю длину очереди и среднее время ожидания заявки в очереди.

Заявка получает отказ, если она поступает в момент времени, когда СМО уже находится в состоянии S_{m+1} и, следовательно, все места в очереди m заняты и один канал обслуживает. Поэтому вероятность отказа определяется вероятностью появления состояния S_{m+1}:

$$p_{отк} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0.$$

Относительная пропускная способность, или доля обслуживаемых заявок, поступающих в единицу времени, определяется выражением

$$Q = 1 - p_{отк} = 1 - \rho^{m+1} p_0.$$

Абсолютная пропускная способность равна:

$$A = Q\,\lambda.$$

Среднее число заявок $L_{оч}$, стоящих в очереди на обслуживание, определяется математическим ожиданием случайной величины k – числа заявок, стоящих в очереди. Случайная величина k принимает следующие только целочисленные значения: 1 – в очереди стоит одна заявка, 2 – в очереди две заявки, …, m – в очереди все места заняты. Вероятности этих значений определяются соответствующими вероятностями состояний, начиная с состояния S_2. Тогда

$$L_{оч} = 1p_2 + 2p_3 + \ldots + mp_{m+1}.$$

В частном случае при $\rho = 1$, когда все вероятности p_k оказываются одинаковыми, можно получить формулу:

$$L_{оч}{}^{1} = \frac{m(m+1)}{2(m+2)}.$$

Среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди определяется формулой:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}.$$

В качестве одной из характеристик СМО используют среднее время $T_{СМО}$ пребывания заявки в СМО, включающее среднее время пребывания в очереди и среднее время обслуживания. Эта величина вычисляется по формулам:

$$T_{СМО} = \frac{L_{оч} + L_{об}}{\lambda};\ \text{при}\ \ \rho = 1, T_{СМО} = \frac{m+1}{2\mu}.$$

Пример. В магазине самообслуживания установлено, что поток покупателей является простейшим с интенсивностью $\lambda = 2$ покупателя в минуту. В этом магазине установлен один кассовый аппарат, позволяющий добиться такой производительности труда, при которой интенсивность потока обслуживания составляет величину $\mu = 2$ покупателя в минуту. Требуется определить характеристики СМО при условии, что очередь ограничена контролером при входе в зал самообслуживания: $m = 5$ покупателям.

В данном случае $\rho = \lambda/\mu$, поэтому получаем, что все вероятности состояний СМО оказываются одинаковыми и равными:

$$p_0 = \frac{1}{m+2} = \frac{1}{7}; p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{7}.$$

Вероятность отказа в обслуживании составляет

$$p_{отк} = p_6 = \frac{1}{7}.$$

Относительная и абсолютная пропускные способности равны:

$$Q = 1 - p_6 = 0{,}857; A = \lambda Q = 1{,}7 \text{ покупателя/мин.}$$

Средняя длина очереди:

$$L_{оч}{}^{1} = \frac{m(m+1)}{2(m+2)} = 2{,}1 \text{покупателя.}$$

Среднее время ожидания в очереди:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}{}^{1}}{\lambda} = 1{,}07 \text{мин.}$$

Среднее время пребывания покупателя в системе:

$$T_{СМО} = \frac{m+1}{2\mu} = 1{,}5 \text{мин.}$$

Таким образом, несмотря на то, что интенсивность потока обслуживания равна интенсивности потока покупателей, по причине случайного характера этих процессов эффективность работы СМО оказывается существенно ниже, чем можно было ожидать, если исходить, например, из предположения, что заявки и обслуживание следуют равномерно во времени. Даже при наличии допустимой очереди из пяти покупателей вероятность отказа в обслуживании остается ощутимой, поскольку каждому седьмому покупателю отказывается в обслуживании. Среднее время пребывания покупателя у кассы втрое превышает значение 0,5 мин, которое было бы при равномерном следовании заявок и равномерном обслуживании.

Улучшение характеристик СМО происходит очень быстро, если уменьшить отношение $\rho = \lambda/\mu$. Уже при $\rho \le 0{,}8$ можно отказаться от ограничения на длину очереди. Если в условиях нашего примера увеличить интенсивность потока обслуживания только на 25%. т.е. установить $\mu = 2{,}5$ (покупателя в минуту) и соответственно $\rho = 0{,}8$ и принять $m \to \infty$, то получим СМО со следующими характеристиками: вероятность отказа $p_{отк} = 0$; относительная пропускная способность $Q = 1$; абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = 2$ (покупателя в минуту); средняя длина очереди $L_{оч} = 3{,}2$ (покупателя); среднее время пребывания у кассы $\bar{t}_{обс} = 2$ мин; среднее время пребывания в очереди $T_{оч} = 1{,}6$ мин.

Такой режим работы СМО может явиться более предпочтительным по сравнению с режимом работы при $\rho = 1$ потому, что ни одному из покупателей не отказывается в обслуживании, хотя длина очереди и время обслуживания в среднем несколько возрастают.

5.5.4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Рассмотрим простейшую одноканальную СМО с ожиданием обслуживания, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, и интенсивностью обслуживания μ. При этом заявка, поступившая в момент, когда канал занят обслуживанием, ставится в очередь и ожидает обслуживания. Размеченный граф состояний такой системы приведен на рис. 5.5.

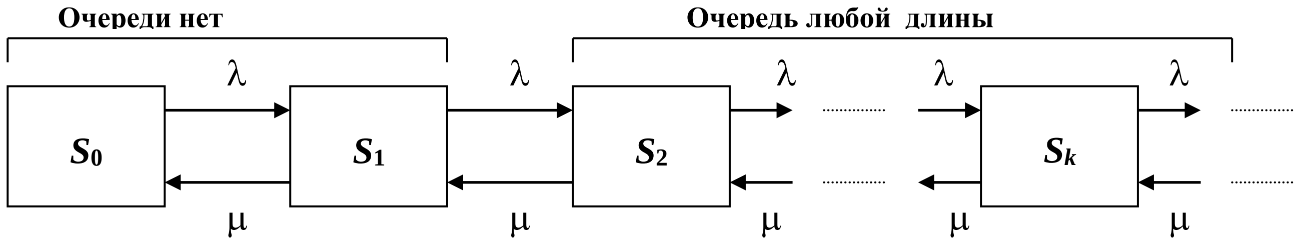


Рис. 5.5. Размеченный граф одноканальной с неограниченной очередью

Количество возможных состояний ее бесконечно:

S_0 – канал обслуживания свободен, очереди нет, $k=0$,

S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет, $k=1$,

S_2 – канал обслуживания занят, в очереди стоит одна заявка, $k=2$,

………………………………………

S_k – канал обслуживания занят $(k-1)$, заявка в очереди.

Модели оценки вероятности состояний СМО с неограниченной очередью можно получить из формул, выведенных для СМО с ограниченной очередью, путем перехода к пределу при $m \to \infty$:

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \\ p_1 = \rho p_0, \\ p_2 = \rho^2 p_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_k = \rho^k p_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 1-\rho, \\ p_1 = \rho(1-\rho), \\ p_2 = \rho^2(1-\rho), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_k = \rho^k(1-\rho), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Поскольку в рассматриваемой СМО ограничение на длину очереди отсутствует, то любая заявка может быть обслужена, поэтому $p_{обс} = 1$, следовательно, относительная пропускная способность $Q = 1$, соответственно $p_{отк} = 0$, а абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda$.

Вероятность пребывания в очереди k заявок равна:

$$p_k = \rho^k (1-\rho);$$

среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho};$$

среднее число заявок в системе:

$$L_{СМО} = L_{оч} + \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho};$$

среднее время ожидания обслуживания в очереди:

$$T_{оч} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{L_{оч}}{\lambda};$$

среднее время пребывания заявки в системе:

$$T_{СМО} = T_{оч} + \bar{t}_{обс} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{L_{СМО}}{\lambda}.$$

Если в одноканальной СМО с ожиданием интенсивность поступления заявок больше интенсивности обслуживания $\lambda > \mu$, то очередь будет постоянно увеличиваться. В связи с этим наибольший интерес представляет анализ устойчивых СМО, работающих в стационарном режиме при $\lambda < \mu$, $\rho < 1$.

Пример. Булочная «Горячий хлеб» имеет одного контролера-кассира. В течение часа приходят в среднем 54 покупателя. Средняя стоимость одной покупки составляет 7 руб. Среднее время обслуживания контролером-кассиром одного покупателя составляет 1 мин. Требуется определить выручку от продажи, характеристики СМО и проведем анализ ее работы.

По условиям задачи $n = 1$, $\lambda = 54$ ед/ч, $\mu = 60$ ед/ч, и поскольку $\rho = \lambda/\mu = 0{,}9$, то очередь не будет расти бесконечно, следовательно, предельные вероятности существуют:

вероятность того, что контролер-кассир свободен:

$$p_0 = 1 - \rho = 0{,}1;$$

вероятность того, что контролер-кассир занят работой:

$$p_{зан} = 1 - p_0 = 0{,}9;$$

среднее число покупателей в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}9^2}{1-0{,}9} = 8{,}1 \text{ чел};$$

среднее время ожидания в очереди:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{8{,}1 \times 60}{54} = 9 \text{ мин};$$

среднее время пребывания покупателя в булочной:

$$T_{СМО} = T_{оч} + \bar{t}_{обс} = 9 + 1 = 10 \text{ мин};$$

среднее число покупателей в булочной:

$$L_{СМО} = L_{оч} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}9}{1-0{,}9} = 9 \text{ чел};$$

вероятность того, что в булочной находятся один, два, три, четыре человека, а следовательно, ожидают расчета в очереди у контролера-кассира 1, 2, 3 человека соответственно:

$$p_1 = \rho(1-\rho) = 0{,}9(1-0{,}9) = 0{,}09;$$

$$p_2 = \rho^2(1-\rho) = 0{,}9^2(1-0{,}9) = 0{,}081;$$

$$p_3 = \rho^3(1-\rho) = 0{,}9^3(1-0{,}9) = 0{,}073.$$

Вероятность того, что ожидают расчета у контролера-кассира не более трех человек, равна $p = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}244$.

Доля времени простоя контролера-кассира составляет всего 10% от продолжительности рабочего дня, однако время ожидания обслуживания в очереди ощутимо – 9 мин, поэтому следует уменьшать время обслуживания $\bar{t}_{обс}$, введя дополнительный кассовый аппарат и соответственно контролера-кассира, иначе покупатели будут уходить в другое торговое предприятие, что приведет к ухудшению экономических показателей хозяйственной деятельности, в частности к уменьшению выручки от продажи хлеба и образованию остатков хлеба на следующий день и к потере его качества.

5.5.5. Многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Рассмотрим многоканальную СМО ($n > 1$), на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, интенсивность обслуживания каждого канала составляет μ, а максимально возможное число мест в очереди ограничено величиной m. Дискретные состояния СМО определяются количеством заявок, поступивших в систему, которые можно записать следующим образом:

S_0 – все каналы свободны, $k = 0$,

S_1 – занят только один канал (любой), $k = 1$,

S_2 – заняты только два канала (любых), $k = 2$,

…………………………………….

S_n – заняты все n каналов, $k = n$.

Пока СМО находится в любом из этих состояний – очереди нет. После того как заняты все каналы обслуживания, последующие заявки образуют очередь, тем самым определяя дальнейшее состояние системы:

S_{n+1} – заняты все n каналов и одна заявка стоит в очереди, $k = n + 1$,

S_{n+2} – заняты все n каналов и две заявки стоят в очереди, $k = n + 2$,

……………………………………….

S_{n+m} – заняты все n каналов и m мест в очереди, $k = n + m$.

Граф состояний n-канальной СМО с очередью, ограниченной m местами, представлен на рис. 5.6.

Переход СМО в состояние с большими номерами определяется потоком поступающих заявок с интенсивностью λ, тогда как по условию в обслуживании этих заявок принимают участие n одинаковых каналов с интенсивностью потока обслуживания равного μ для каждого канала. При этом полная интенсивность потока обслуживания возрастает с подключением новых каналов вплоть до такого состояния S_n, когда все n каналов окажутся занятыми. С появлением очереди интенсивность обслуживания более не увеличивается, так как она уже достигла максимального значения, равного $n\mu$.

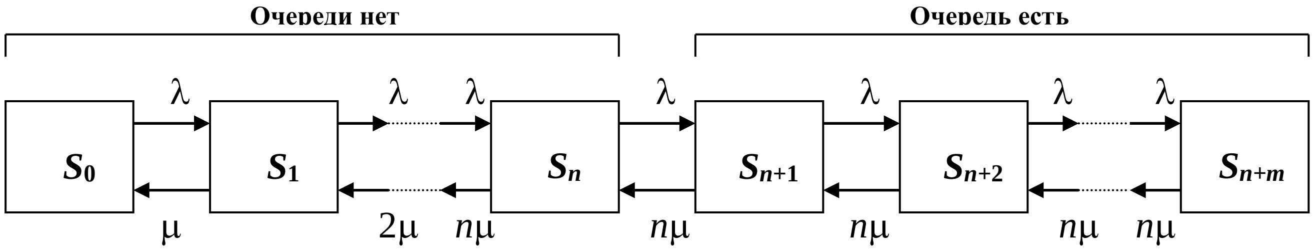


Рис. 5.6. Граф состояний *n*-канальной СМО с ограничением на длину очереди *m*

Запишем выражения для предельных вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\rho}{1!} p_0; p_2 = \dfrac{\rho^2}{2!} p_0 \ldots\ldots\ldots; p_k = \dfrac{\rho^k}{k!} p_0, 0 \le k \le n; \\ p_n = \dfrac{\rho^n}{n!} p_0; p_{n+1} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n\,n!} p_0; p_{n+2} = \dfrac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} p_0 \ldots\ldots\ldots; \\ p_{n+r} = \dfrac{\rho^{n+r}}{n^r n!} p_0, n \le r \le m; p_{n+m} = \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 = p_{отк}; \end{cases}$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n\,n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} \right]^{-1}.$$

Образование очереди возможно, когда вновь поступившая заявка застанет в системе не менее n требований, т.е. когда в системе будет находиться n,

$n+1$, $n+2$, ..., $(n+m-1)$ требований. Эти события независимы, поэтому вероятность того, что все каналы заняты, равна сумме соответствующих вероятностей p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, …, , p_{n+m-1}. Поэтому вероятность образования очереди равна:

$$p_{оч}=\sum_{k=n}^{n+m-1} p_k=\frac{\rho^n}{n!}\frac{1-(\rho/n)^m}{1-\rho/n}p_0.$$

Вероятность отказа в обслуживании наступает тогда, когда все n каналов и все m мест в очереди заняты:

$$p_{отк}=p_{n+m}=\frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}p_0.$$

Относительная пропускная способность будет равна:

$$Q=p_{обс}=1-p_{отк};$$

абсолютная пропускная способность:

$$A=\lambda Q;$$

среднее число занятых каналов:

$$\bar{n}_з=A/\mu=\rho Q;$$

среднее число простаивающих каналов:

$$\bar{n}_{пр}=n-\bar{n}_з;$$

коэффициент занятости (использования) каналов:

$$K_з=\bar{n}_з/n;$$

коэффициент простоя каналов:

$$K_{пр}=1-K_з;$$

среднее число заявок, находящихся в очередях:

$$L_{оч}=\frac{\rho^{n+1}}{n\,n!}\frac{1-(\rho/n)^m(m+1-m\rho/n)}{(1-\rho/n)^2}p_0;$$

в случае если $\rho/n=1$, эта формула принимает другой вид:

$$L_{оч}=\frac{\rho^{n+1}}{n\,n!}\frac{m(m+1)}{2}p_0;$$

среднее время ожидания в очереди определяется выражением:

$$T_{оч}=\frac{L_{оч}}{\lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО, как и для одноканальной СМО, больше среднего времени ожидания в очереди на среднее время обслуживания, равное $1/\mu$, поскольку заявка всегда обслуживается только одним каналом:

$$T_{СМО}=\frac{L_{оч}}{\lambda}+\frac{Q}{\mu}.$$

Пример. В мини-маркет поступает поток покупателей с интенсивностью 6 покупателей в 1 мин, которых обслуживают три контролера-кассира с интенсивностью 2 покупателя в 1 мин. Длина очереди ограничена 5 покупателями. Требуется определить характеристики СМО и дадим оценку ее работы.

В данном случае n = 3; m = 5; λ = 6; μ = 2; $\rho = \lambda/\mu = 3$; $\rho/n = 1$. Найдем предельные вероятности состояний СМО:

доля времени простоя контролеров-кассиров:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{5\rho^4}{3 \cdot 3!}\right]^{-1} = 0{,}0282;$$

вероятность того, что занят обслуживанием только один канал:

$$p_1 = 3p_0 = 0{,}0846;$$

вероятность того, что заняты обслуживанием два канала:

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 0{,}127;$$

вероятность того, что заняты обслуживанием все три канала:

$$p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0 = 0{,}127;$$

вероятность того, что заняты обслуживанием все три канала и пять мест в очереди:

$$p_8 = 0{,}127.$$

Очевидно, что $\sum_{i=0}^{8} p_i = 1$. Вероятность отказа наступает при $k = m + n = 8$ и составляет $p_8 = p_{отк} = 0{,}127$.

Относительная и абсолютная пропускные способности СМО соответственно равны $Q = 1 - p_{отк} = 0{,}873$ и $A = 0{,}873\lambda = 5{,}24$ (покупателя в 1 мин).

Среднее число занятых каналов и средняя длина очереди равны:

$$\bar{n}_з = \rho Q = 2{,}62;\ L_{оч} = 1{,}9 \text{ пок.}$$

Среднее время ожидания в очереди и пребывания в СМО соответственно равно:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = 0{,}32 \text{ мин};\ T_{СМО} = \bar{t}_{обс} + \frac{Q}{\mu} = 0{,}76 \text{ мин.}$$

Таким образом, увеличение числа касс с трех до четырех позволяет существенно улучшить эффективность работы СМО: отказа в обслуживании не получает ни один покупатель, уменьшаются средняя длина очереди и среднее время пребывания покупателей в СМО.

5.5.6. Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Рассмотрим многоканальную СМО с ожиданием и неограниченной длиной очереди, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ и которая имеет интенсивность обслуживания каждого канала μ. Размеченный граф состояний представлен на рис. 5.7. Он имеет бесконечное число состояний:

S_0 – все каналы свободны, $k = 0$;

S_1 – занят один канал, остальные свободны, $k = 1$;

S_2 – заняты два канала, остальные свободны, $k = 2$;

……………………………………………………

S_n – заняты все n каналов, $k = n$, очереди нет;

S_{n+1} – заняты все n каналов, одна заявка в очереди, $k = n + 1$;

……………………………………………………

S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок в очереди, $k = n + r$.

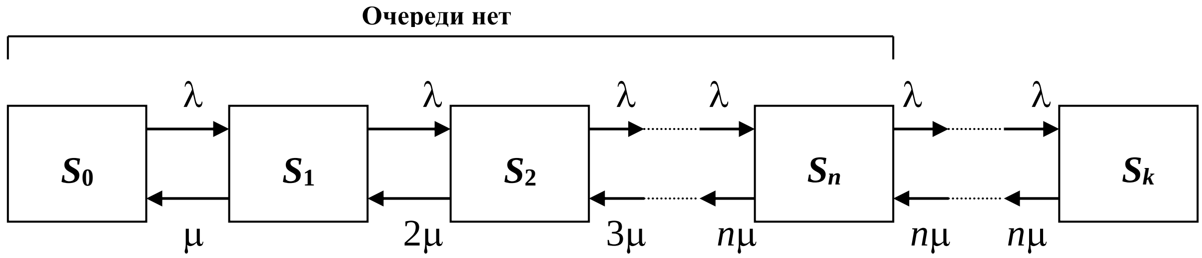


Рис. 5.7. Размеченный граф состояний многоканальной СМО с неограниченной очередью

Вероятности состояний получим из формул для многоканальной СМО с ограниченной очередью при переходе к пределу при $m \to \infty$. Следует заметить, что сумма геометрической прогрессии в выражении для p_0 расходится при уровне загрузки $\rho/n \geq 1$ (очередь будет бесконечно возрастать), а при $\rho/n < 1$ ряд сходится, что определяет установившийся стационарный режим работы СМО, для которого и определим выражения для предельных вероятностей состояний:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{(n-\rho)n!}\right]^{-1}; \; p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0; \; p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0; \; \ldots;$$

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0; \quad p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n\, n!} p_0; \quad p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} p_0; \; \ldots; \; p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r n!} p_0.$$

Поскольку отказа в обслуживании в таких системах не может быть, то характеристики пропускной способности равны:

$$p_{отк} = 0; \quad Q = 1; \quad A = \lambda Q = \lambda;$$

среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч}=\frac{\rho^{n+r}}{n\,n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}p_0;$$

среднее время ожидания в очереди:

$$T_{оч}=\frac{\rho^{n}}{n\mu\,n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}p_0;$$

среднее число заявок в СМО:

$$L_{СМО}=L_{оч}+\rho.$$

Вероятность того, что СМО находится в состоянии S_0. когда нет заявок и не занято ни одного канала, определяется выражением

$$p_0=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}.$$

Эта вероятность определяет среднюю долю времени простоя канала обслуживания.

Вероятность занятости обслуживанием k заявок:

$$p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0,\quad 1\le k\le n.$$

На этом основании можно определить вероятность, или долю времени занятости всех каналов обслуживанием:

$$p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0,\quad k=n.$$

Если же все каналы уже заняты обслуживанием, то вероятность состояния определяется выражением:

$$p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r n!}p_0=p_n\left(\frac{\rho}{n}\right)^r,\quad k>n.$$

Вероятность оказаться в очереди равна вероятности застать все каналы уже занятыми обслуживанием:

$$p_{оч}=\frac{n\rho^n}{(n-\rho)n!}p_0,\quad k\ge n.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди и ожидающих обслуживания, равно:

$$L_{оч}=\frac{n}{n-\rho}p_{оч};$$

среднее время ожидания заявки в очереди начала обслуживания:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda};$$

среднее время пребывания заявки в СМО:

$$T_{СМО} = T_{оч} + \bar{t}_{обс};$$

среднее число занятых каналов обслуживанием:

$$\bar{n}_з = \frac{\lambda}{\mu} = \rho;$$

среднее число свободных каналов:

$$\bar{n}_{св} = n - \rho;$$

коэффициент занятости каналов обслуживанием:

$$K_з = \frac{\bar{n}_з}{n} = \frac{\rho}{n};$$

среднее число заявок в СМО:

$$L_{СМО} = L_{оч} + \bar{n}_з = L_{оч} + \rho.$$

Процесс обслуживания будет стабилен при $\rho < n$. Если же $\rho \geq n$, в системе будут возрастать средняя длина очереди и среднее время ожидания покупателями начала обслуживания, и, следовательно, СМО будет работать неустойчиво.

Пример. В столовой к узлу расчета поступает пуассоновский поток посетителей с интенсивностью $\lambda = 120$ человек в час. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного посетителя составляет $T_{обс} = 1$ мин. Требуется определить оптимальное число контролеров-кассиров n_0, при котором общие издержки C, определяемые затратами, с одной стороны, на содержание контролеров-кассиров C_1, а с другой – пребыванием посетителей в очереди C_2, были бы минимальны.

Издержки C_1 определяются числом каналов обслуживания n, величиной затрат, связанных с содержанием в системе одной обслуживающей единицы в течение одной единицы времени C_K (руб./ч) и интенсивностью входного потока λ.

Издержки потребления C_2 определяются величиной удельных потерь $C_{оч}$, связанных с пребыванием в очереди одного покупателя в течение единицы времени и средним временем ожидания в очереди $T_{оч}$. Тогда целевую функцию затрат, связанную с пребыванием покупателей в системе в течение единицы времени, можно записать так:

$$C = (C_K n/\lambda + C_{оч} T_{оч}).$$

Для удобства проведения вычислений предположим, что $C_{оч} / C_K = 3/1$, что позволит определить соотношение стоимостей обслуживания для разных вариантов организации системы.

Только при условии $\rho < n$ очередь может быть конечна, т. е. число заявок, поступающих в СМО за промежуток времени, равный средней длительности обслуживания $T_{обс}$ меньше числа обслуживающих каналов. Это обусловлено вероятностным характером как потока заявок, так и временем их обслуживания. Поэтому о рациональности варианта организации СМО можно рассуждать лишь в том случае, если $n > \rho$. Поскольку из условия задачи следует, что интенсивность нагрузки $\rho = \lambda/\mu = 2$, то вычисления показателей системы следует начать с $n = 3$.

Сначала определяем долю времени простоя контролеров-кассиров в течение рабочего дня, т.е. при условии отсутствия покупателей:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{k!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)}\right]^{-1} = 0{,}11.$$

Следовательно, три контролера-кассира будут простаивать 11% времени от всей продолжительности рабочего дня. В результате получим следующее:

вероятность застать всех контролеров-кассиров занятыми:

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{2^3}{3!} 0{,}11 = 0{,}148;$$

вероятность оказаться в очереди:

$$p_{оч} = \frac{n\rho^n}{(n-\rho)n!} p_0 = \frac{n}{n-\rho} p_n = 0{,}445;$$

среднее число покупателей, находящихся в очереди:

$$L_{оч} = \frac{n}{n-\rho} p_{оч} = 1{,}235 \text{ чел};$$

среднее время ожидания покупателями в очереди начала обслуживания:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1{,}235}{2} = 0{,}617;$$

относительная величина затрат для $n = 3$ и $C_{оч} = 3C_K$ составляет:

$$\frac{C}{C_K} = n\frac{1}{\lambda} + 3T_{оч} = 3{,}351.$$

Затем проводим аналогичные вычисления по определению перечисленных показателей для других значений $n = 4, 5, 6$ и результаты запишем в табл. 5.2.

Таблица 5.2

n	3	4	5	6	7
C/C_K	3,351	2,525	2,65	3,04	3,512

По данным таблицы следует, что оптимальное число контролеров-кассиров в узле расчета $n_0 = 4$ для соотношения $C_{оч}/C_K = 3/1$. при этом общие затраты будут минимальными. Аналогичную задачу можно решить, задав другие соотношения $C_{оч}/C_K$.

6. МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

6.1. Введение

Макроэкономика – изучение экономики в целом, как совокупности всех экономических показателей. Предполагается, что существуют следующие агенты (сектора) макроэкономики:

- сектор домашних хозяйств;
- сектор предпринимателей (фирм);
- сектор государства (правительства);
- сектор «заграница».

Последний сектор, включающий потоки товаров и денежных средств, поступающих из страны (экспорт) или в страну (импорт), мы не будем рассматривать в нашем изложении.

В ходе своей деятельности макроэкономические агенты функционируют на различных рынках. Наиболее общепринятой является следующая классификация рынков:

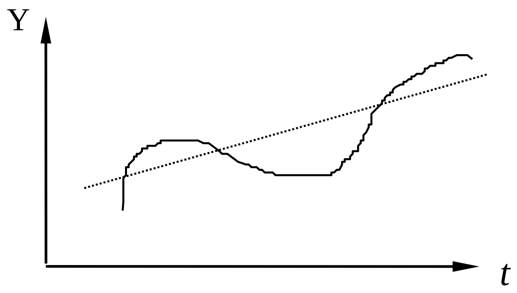
- рынок товаров и услуг (рынок благ);
- рынок труда;
- денежный рынок;
- рынок ценных бумаг.

Каждый из рынков, рассматриваемый в отдельности, стремится к равновесию спроса и предложения. В то же время, в реальной жизни это равновесие не всегда достижимо на отдельных рынках. Несмотря на это, экономисты придерживаются концепции общего экономического равновесия (ОЭР), которая следует из закона Вальраса. Этот закон констатирует, что если возникает излишек спроса на одном из рынков, то он должен быть сбалансирован излишком предложения на другом.

Исторически макроэкономисты были разбиты на две группировки. Первая из них получила название **«классической школы»** и возникла в конце $19^{го}$ – начале $20^{го}$ века. Вторая, **«кейнсианская школа»** появилась в годы «Великой депрессии» в 1929-33 гг. и названа в честь ее основателя Дж. Кейнса. Основными противоречиями между двумя группами послужили доводы о роли рынка труда и воздействии правительства на экономику. Если «классики» считали, что для любого уровня цен номинальная зарплата является абсолютно гибкой и меняется таким образом, чтобы удерживать равновесие на рынке труда и гарантировать полную занятость, то «кейнсианцы» утверждали, что полная занятость не гарантируется автоматически, и что уровень занятых в каждый момент времени определяется фискальной и монетарной политикой правительства.

В любом случае макроэкономический анализ обычно сводится к следующему. Вначале рассматриваются процессы и определяется равновесие на каждом из рынков в отдельности. Затем строятся модели ОЭР, включающие все рынки макроэкономики и их взаимодействия друг с другом, а также модели экономической конъюнктуры и экономического роста.

Теория ОЭР – это теория макроэкономической **статики**, поскольку ее цель – определить условия, обеспечивающие равенство спроса и предложения одновременно на всех рынках. Теория экономических циклов (экономической конъюнктуры) и теория экономического роста относятся с теориям экономической **динамики**, которые объясняют развитие экономики и народного хозяйства во времени. Различие предметов исследования этих двух частей экономической динамики можно проиллюстрировать на рисунке, где по оси ординат откладывается значение показателя, характеризующего уровень экономической активности общества (например, величина реального национального дохода), а по оси абсцисс – время.



Теория **цикла** призвана объяснить причины колебания экономической активности общества во времени (волнообразная кривая), а теория **роста** исследует факторы и условия устойчивого роста как долговременной тенденции в развитии экономики (прямая линия).

В начале 70^{х} годов новый экономический кризис активизировал развитие новых течений в макроэкономике. Концепция «новых классиков», развитая в работах Т. Сарджента и Р. Лукаса, основана на введение зависимости от времени в вальрасовскую модель ОЭР. Предполагается, что экономические субъекты принимают решения на основе прогноза цен в соответствии с концепцией **рациональных ожиданий**. В результате модель становиться стохастической, поскольку в ней учитываются случайности. Другое направление, названное «неокейнсианством», постулируя негибкость цен в коротком периоде, исследует неценовые (количественные) приспособления спроса и предложения друг к другу, в ходе которых возникают квазиустойчивые состояния в экономике (квазиравновесия). Какая из двух этих школ права при оценки экономики в целом и эффективности ее государственного регулирования, определяется тем, у какой из них исходные предпосылки точнее соответствуют реальным условиям функционирования национального хозяйства.

6.2. Модели теории потребления

Рассмотрим некоторые макроэкономические модели, связанные с категорией потребления. Одним из секторов экономики является сектор домашних хозяйств, располагаемый доход которых

$$y = C + S,$$

где C – потребление, S – сбережения.

Модель Робинзона Крузо

Основные предпосылки:

- домашнее хозяйство потребляет только то, что производит (сбережения отсутствуют), $C_t = y_t$ – текущий уровень дохода;
- отсутствуют денежный и фондовый рынок;
- домашние хозяйства рациональны (максимизируют свою полезность);
- потребление и досуг – нормальные товары, труд – инфериорный товар (домашние хозяйства предпочитают больше потреблять и отдыхать, чем трудиться);
- существует некоторый уровень автономного потребления C_0, который не зависит от дохода;

Модель. Поведенческая функция домашних хозяйств может быть представлена следующей кривой безразличия (рис. 6.1). Данная кривая показывает насколько возрастет потребление при увеличении затрат труда на единицу. В точке C_0 доход равен нулю, домашние хозяйства потребляют лишь в объеме автономного потребления и располагают полностью всем свободным временем. Исходя из предпосылки о рациональности домашних хозяйств, дополнительное потребление будет более предпочтительно, чем дополнительный досуг. Следовательно, домашние хозяйства будут увеличивать объем труда $\Rightarrow$ объем располагаемого дохода $\Rightarrow$ объем потребления. С каждой дополнительной единицей труда объем потребления увеличивается все в большей степени:

$$C_1 = C_0 + \Delta C_1;\ C_2 = C_1 + \Delta C_2 \text{ и т.д., причем } \Delta_{,,i+1} > \Delta C_i.$$

Заметим, что все точки кривой соответствуют одному и тому же уровню полезности. Однако, с ростом располагаемого дохода увеличивается размер имущества домашних хозяйств. Поэтому C_0 со временем будет расти и мы получим карту кривых безразличия в зависимости от уровня дохода (рис. 6.2).

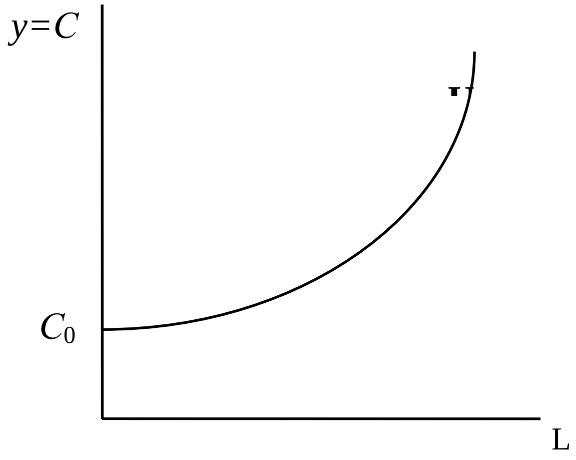


Рис. 6.1. Кривая безразличия

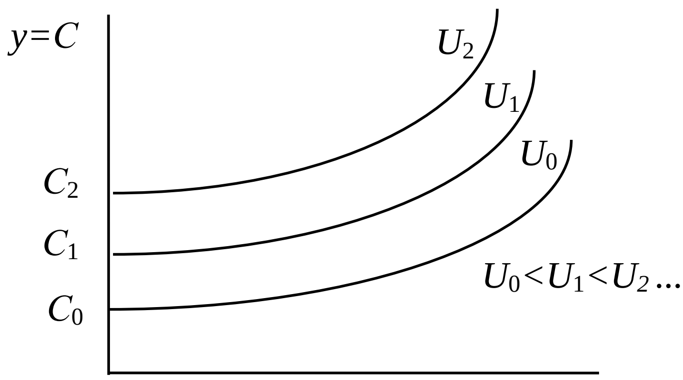


Рис. 6.2. Карта кривых безразличия

Двухпериодная модель

В модели Робинзона Крузо предполагалось отсутствие торговли и денежного рынка. Теперь рассмотрим новые, более реалистичные предположения:

- существует товарный рынок (домашние хозяйства могут обмениваться товарами);
- существует денежный рынок (домашние хозяйства могут иметь на руках определенное количество наличности *M*);
- существует рынок ценных бумаг, представленный одной ценной бумагой – облигацией стоимостью *B* (домашние хозяйства могут занимать и давать в долг);
- существует уровень цен *p* и ставка процента *r*, единые для всех домашних хозяйств.

В этом случае можно записать следующее бюджетное ограничение домашних хозяйств для одного периода:

$$py_1 + B_0(1+r) + m_0 = pC_1 + B_1 + m_1,$$

где p – уровень цен в экономике; r – процентная ставка; py_1 – доход от продаж; B_0 $(1 + r)$ – доход от ценных бумаг, приобретенных в предыдущем периоде и оставшихся к началу первого периода; m_0 – количество денег на руках, оставшихся в конце предыдущего периода; pC_1 – расходы на потребление; B_1 – расходы на приобретение ценных бумаг; m_1 – предполагаемый остаток наличности к концу текущего периода. Аналогичный вид имеет бюджетное ограничение для следующего периода:

$$py_2 + B_1(1+r) + m_1 = pC_2 + B_2 + m_2 .$$

Определив из последнего уравнения B_1 и подставив его в первое, а также предположив равенство денежных остатков ($m_0 = m_1 = m_2$), получим бюджетное ограничение для двух периодов:

$$py_1 + \frac{py_2}{1+r} + B_0(1+r) = pC_1 + \frac{pC_2}{1+r} + \frac{B_2}{1+r} .$$

Здесь $py_1 + \frac{py_2}{1+r}$ – текущая стоимость дохода в двух периодах; $pC_1 + \frac{pC_2}{1+r}$ – текущая стоимость потребления в двух периодах.

Для анализа выбора домашних хозяйств между потреблением в первом и втором периодах перегруппируем последнее уравнение и разделим его почленно на уровень цен:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} + \frac{B_0(1+r)}{p} - \frac{B_2}{(1+r)p} = X ,$$

где X – объем «богатства» домашних хозяйств.

Если приведенные стоимости облигаций в нулевой и второй периоды равны, то выражение упрощается:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} = X .$$

Экономический смысл X заключается в том, что домашние хозяйства, зная свой доход, могут выбирать между текущим и будущим потреблением при заданной величине X. Тогда можно определить бюджетную линию домашних хозяйств – линию в плоскости $C_1 - C_2$ с наклоном $-(1 + r)$. Решение индивидуума о распределении общей суммы имеющихся для потребления средств между первым и вторым периодами можно представить как наложение графика бюджетной линии на карту кривых безразличия (рис. 6.3). Точка качания бюджетной линии с одной из кривых безразличия определит оптимальные объемы потребления в каждом из периодов: C_1^* и C_2^*.

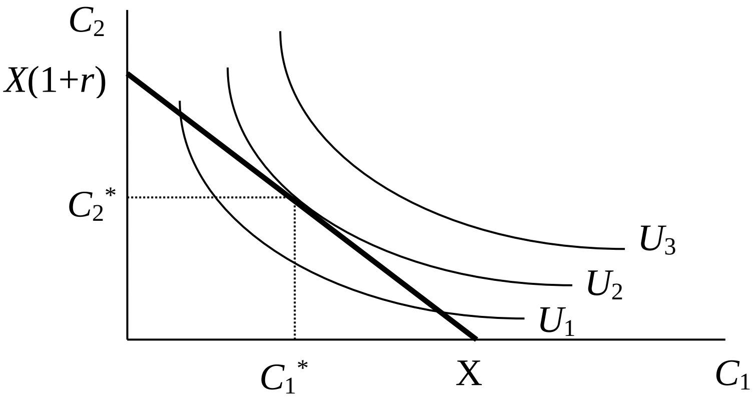


Рис. 6.3. Межвременной выбор домашних хозяйств

Модель Кейнса

Кейнс создал простую модель, связывающую текущий доход и текущее потребление:

$$C = C_0 + C_y y;\ C_0 > 0;\ 0 < C_y < 1,$$

где C_0 – величина автономного (независимого от текущего дохода) потребления, при $y = 0$ автономное потребление осуществляется за счет сокращения имущества; $C_y = MPC$ – предельная склонность к потреблению (показывает пропорцию изменения потребления по отношению к изменению в располагаемом доходе).

Функция сбережения в кейнсианской модели

$$S = S_0 + S_y y;\ S_0 < 0;\ 0 < S_y < 1,$$

где S_0 – отрицательный уровень сбережений в отсутствии дохода; $S_y = MPS$ – предельная склонность к сбережению (показывает пропорцию изменения сбережений по отношению к изменению в располагаемом доходе).

Справедливы следующие соотношения:

$$\boxed{\boldsymbol{C_y + S_y = 1}} \qquad \boxed{C + S = y}$$

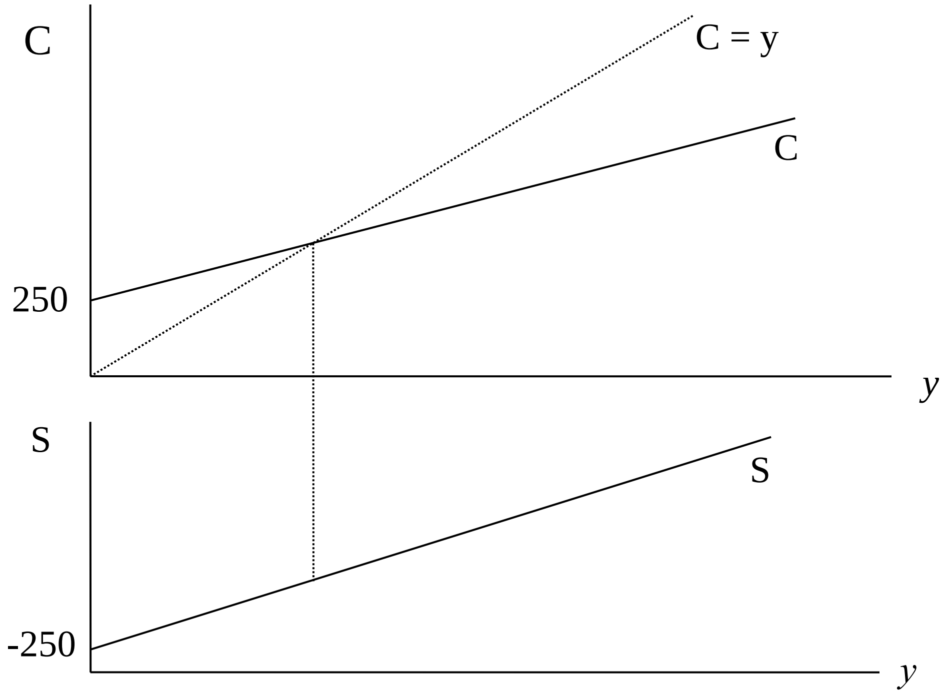


Рис. 6.4. Функции потребления и сбережения (кейнсианский подход)

Пример. Пусть C = 0,75; S = 0,25; C_0 = 250. Отсюда S_0 = -250. Имеем следующие зависимости для функций потребления и сбережения:

$$C = 250 + 0{,}75y;\ S = -250 + 0{,}25\,y.$$

Эти зависимости можно изобразить графически (рис. 6.4). В области, где потребление превышает доход, сбережения отрицательны, а в области, где доход превышает потребление – положительны.

Теория потребления с постоянным доходом

Одно из основных следствий двухпериодной модели потребления состоит в том, что потребление домашнего хозяйства зависит не только от текущего дохода, но и от дохода, который ожидается в будущем. Другими словами, потребление в каждом году должно зависеть от среднего уровня дохода, ожидаемого в этом году и в следующие годы. Это положение было впервые сформулировано в 1950 году лауреатом Нобелевской премией Милтоном Фридменом. Он использовал термин «перманентный доход», чтобы обозначить средний доход, который домашние хозяйства ожидают получить в долгосрочной перспективе.

Согласно модели перманентного дохода потребление соответствует доходу y_p, который определяется как средняя величина настоящих и будущих доходов. Найдем такое значение y_p, при котором домашнее хозяйство буде иметь тоже самое многопериодное бюджетное ограничение, которое было бы при выпуске y_p в каждом из периодов:

$$y_p + \frac{y_p}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} \Rightarrow y_p = \frac{1+r}{2+r}\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right).$$

Значение y_p определяется графически пересечением биссектрисы на плоскости 1-й период – 2-й период с линией бюджетного ограничения (рис. 6.5).

В точке A выпуски обоих периодов равны. В данном случае $y_1 > y_p$, $y_2 < y_p$ (точка E). Если домашнее хозяйство максимизирует свою полезность, то в каждом периоде потребление одинаково и равно перманентному доходу ($C_1 = C_2 = y_p$). Следовательно, сбережения определяются разностью между текущим и постоянным доходом: $S_1 = y_1 - C_1 = y_1 - y_p$.

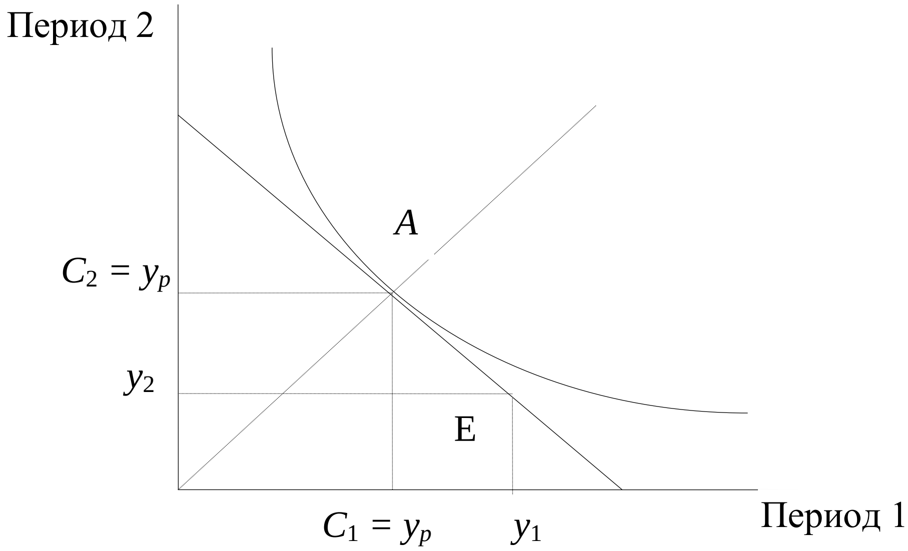


Рис. 6.5. Потребление и перманентный доход домашнего хозяйства

Пример 2. Построить бюджетное ограничение для домашних хозяйств, которое зарабатывает 100 долларов в первом периоде и 200 долларов во втором периоде своей жизни. Ставка процента равна 10%. Чему равен перманентный доход этого домашнего хозяйства?

Решение: $C_1 + \frac{C_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} = x$, $C_1 + \frac{C_2}{1+0{,}1} = 100 + \frac{200}{1+0{,}1} = 282$.

Перманентный доход:

$$y_p = \frac{1+r}{2+r}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right] = \frac{1{,}1}{2{,}1}\left[100 + \frac{200}{1{,}1}\right] = 147{,}8.$$

Модель жизненного цикла

Модель разработана Нобелевским лауреатом Франко Модильяни. В соответствии с ней текущий объем потребления индивидуума определяется в результате равномерного потребления всего потока ожидаемых за годы жизни доходов. Пусть $T_{ож}$ – ожидаемое число лет экономически самостоятельной деятельности (трудовая деятельность + жизнь за счет пенсионного фонда); $T_{пл}$ – планируемое число лет работы; w – ожидаемый среднегодовой заработок за весь период работы. Тогда годовой объем потребления:

$$C = \frac{T_{пл}}{T_{ож}} w,$$

а годовой объем сбережений

$$S = w - C = \left(\frac{T_{ож} - T_{пл}}{T_{ож}} \right) w.$$

В каждом текущем году своей трудовой жизни (T = 1, ..., $T_{пл}$) индивидуум располагает определенным фондом сбережений V. Если к нему добавить весь ожидаемый до конца рабочего периода доход $w(T_{пл} - T)$, то получится суммарный объем возможного потребления до конца жизни индивидуума. Разделив эту сумму на число лет оставшейся жизни, можно определить объем *текущего потребления*:

$$C = \frac{V + w(T_{пл} - T)}{T_{ож} - T} = C_v V + C_w w,$$

где $C_v = \dfrac{1}{T_{ож} - T}$ – предельная склонность к потреблению от имущества (показывает, насколько увеличивается потребление, если имущество увеличивается на единицу); $C_w = \dfrac{T_{пл} - T}{T_{ож} - T}$ – предельная склонность к потреблению заработной платы (показывает, насколько увеличится потребление, если зарплата увеличится на единицу).

Пример 3. Вступающий в самостоятельную жизнь молодой человек полагает, что проживет еще 70 лет, из которых 45 планирует трудиться и 25 жить на свои сбережения. Ожидаемый среднегодовой заработок равен 140. Найти годовой объем потребления, годовой объем сбережений и сумму, накопленную в пенсионный фонд. Найти объем текущего потребления на 30 году жизни индивидуума.

Решение: Базируясь на модели жизненного цикла, имеем:

$C = \frac{T_{пл}}{T_{ож}} w = \frac{45}{70} 140 = 90$ – годовой объем потребления,

$S = w - C = 140 - 90 = 50$ – годовой объем сбережений,

50×45 = 2250 – сумма пенсионного фонда.

$$C = C_v V + C_w w.$$

Пусть фактически объем сбережений V совпадает с планируемым, т.е.

$$V = ST = 50 \cdot 30 = 1500;\ w = 140.$$

$$C_v = \frac{1}{T_{ож} - T} = 0{,}0025;\ \ C_w = \frac{T_{пл} - T}{T_{ож} - T} = 0{,}375\ \text{, тогда}$$

$$C_{30} = 0{,}0025 \times 1500 + 0{,}375 \times 140 = 90.$$

6.3. Мультипликаторы в экономике

Наличие мультипликаторов на первый взгляд кажется парадоксом. Действительно, совокупный доход возрастает на величину, существенно большую, чем расходы, а предложение денег в стране увеличивается быстрее, чем выпуск денежной наличности. Однако, при детальном рассмотрении обнаруживается экономический смысл мультипликаторов, как важнейшего элемента рыночной экономики.

Мультипликатор автономных расходов

Допустим, что на рынке нет государства и заграницы, тогда равновесие на рынке благ

$$y = C_y y + I.$$

В левой части равенства – совокупный доход (предложение благ в экономике), в правой части – совокупный спрос (сумма потребительского спроса $C = C_y y$ и инвестиционного спроса I. Предположим, что инвестиции увеличились на ΔI. Чтобы при возросшем спросе на инвестиции на рынке благ сохранилось равновесие, предложение тоже увеличиться на Δy, тогда

$$y + \Delta y = C_y (y + \Delta y) + I + \Delta I.$$

Отсюда

$$\Delta y = \frac{1}{1 - C_y} \Delta I.$$

Сомножитель $1/(1 - Cy)$ – мультипликатор автономных расходов. Он показывает, на сколько возрастает равновесный национальный доход при увеличении автономного спроса на единицу. Поскольку $0 < Cy < 1$, мультипликатор больше единицы. За счет чего же имеет место умножение (мультипликация) национального дохода от прироста инвестиций?

Пример 4. Допустим, я нанимаю рабочих, чтобы сделать забор на моей даче. Я плачу плотникам 1000 ден. ед., куда входит и цена досок. Итак, плотники и продавцы досок получили доход в 1000. Предположим, что их предельная склонность к потреблению равна 0,6. Допустим, что они отоварились в ближайшем магазине, истратив 600 единиц. Хозяин этого магазина получил доход в 600. Если его предельная склонность к потреблению тоже равна 0,6, тогда он купит для себя потребительских благ на $0{,}6 \times 600 = 360$. Но для кого-то эти 360 тоже будут доходом, и т.д. Таким образом, если предельная склонность к потреблению везде равна 0,6, прирост инвестиций в народное хозяйство страны на 1000 дает прирост национального дохода на величину:

$$1000 + 600 + 360 + 216 + 129{,}6 + 77{,}8 + \ldots$$

Впрочем, полная сумма легко вычисляется по формуле суммы членов убывающей геометрической прогрессии:

$$\Delta y = \frac{1}{1-0{,}6}1000 = 2{,}5 \times 1000 = 2500.$$

Денежный мультипликатор

Считаем, что денежная база не меняется (деньги не печатаются). Пусть M – предложение денег, C – сумма наличности на руках у населения, D – сумма средств на текущих счетах. Тогда

$M = C + D$ – сумма наличности и депозитов.

Если в стране нет банков (США, 150 лет назад), тогда деньги существуют только в виде наличности на руках у населения ($M = C$).

Пусть в стране существуют банки, и мы допускаем, что они принимают деньги от населения (вклады), но не выдают кредитов. Все деньги, которые поступают, направляются в резервы. *Резервы* – это сумма средств, внесенные на банковские счета и не выданные в качестве кредита. В нашем случае 100% банковское резервирование, т.е. деньги выдаются только по требованию вкладчиков. Предположим, что все деньги находятся в банковской системе ($M = D$).

Рассмотрим баланс коммерческого банка. *Баланс* – соотношение активов и пассивов. *Пассивы* – обязательства банка перед вкладчиками. *Активы* – капитал, свободный от обязательств и долгов. Резервы хранятся в активах.

Пусть в банк внесли 1000 долларов.

Пример 1. Дана функция потребления $C = 0{,}7y + 50$. Найти функцию сбережения.

Решение: $y = C + S \Rightarrow S = y - C = y - (a + cy) = -a + (1 - c)y$.
Поскольку $a + b = 1$, то $S = -a + by = -50 + 0{,}3y$.

Активы	Пассивы
Резервы 1000 дол.	Депозиты 1000 дол.

100% резервирование

Теперь изменим предпосылку. Пусть банки выдают какой-то объем кредитов. Как при этом происходит увеличение предложение денег? В резервы направляется только часть вкладов. *Норма резервирования – rr* – это доля денежной массы, которую коммерческие банки обязаны хранить в Центробанке в зависимости от объемов вкладов. Норму резервирования определяет Центробанк.

Пусть rr = 20%.

Первый банк

Активы	Пассивы
Резервы 200 дол. Кредиты 800дол.	Депозиты 1000 дол.

$1000 - rr\times1000 = (1 - rr)\times1000$ – объем кредита первого банка

Второй банк

Активы	Пассивы
Резервы 160 дол. Кредиты 640 дол.	Депозиты 800 дол.

$(1 - rr)\times1000 - rr\times(1 - rr)\times1000 = (1 - rr)^2\times 1000$ – объем кредита второго банка

Третий банк

Активы	Пассивы
Резервы 160 дол. Кредиты 640 дол.	Депозиты 800 дол.

$(1 - rr)^2\times1000 - rr\times(1 - rr)^2\times1000 = (1 - rr)^3\times1000$ – объем кредита третьего банка

Если все сложить, получим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

$$1000((1 - rr) + (1 - rr)^2 + (1 - rr)^3 + \ldots) = \frac{1}{rr}1000;$$

$D = R/rr = 1000/0{,}2 = 5000$ – максимальная сумма депозита, которую можно создать в банковской системе.

Тогда $\frac{1}{rr}$ – это мультипликатор денежной эмиссии (банковский мультипликатор). Сам процесс роста денежной массы подобным путем называется *кредитная мультипликация.*

В данном случае проявляется уникальная способность коммерческих банков к увеличению предложения денег при заданной денежной базе. В этом их основное отличие от других финансовых учреждений (страховых, пенсионных фондов и т.д.). Другими словами: банки перераспределяют средства от заемщика к кредитору и наоборот.

Это упрощенный денежный мультипликатор. На самом деле существует еще один параметр – норма депонирования. Рассмотрим модель предложения денег при частичном банковском резервировании в зависимости от поведения домашних хозяйств.

Введем *cr – норму депонирования* – определяет предпочтения домашних хозяйств в распределении денег между потреблением (наличностью) и средствами на текущих счетах. Пусть C – наличность на руках у населения; D – средства на текущих счетах; B – денежная база или деньги повышенной мощности (используется при увеличении предложения денег); $cr = C/D$.

Денежная база $B = C + R$, где R – деньги, которые находятся в резервах; B – это общая сумма выпущенная Центральным банком.

Общее предложение денег $M = C + D$, $C = cr\times D$, тогда $M = cr\times D + D = (1+ cr)D$. Отсюда

$$D = \frac{M}{1+cr}.$$

Денежная база – сумма наличности и резервов $R = rr\times D$, тогда $B = cr\times D + rr\times D = (cr+ rr)\times D$. Отсюда

$$D = \frac{B}{cr+rr}.$$

Приравняем эти два соотношения

$$\frac{M}{1+cr} = \frac{B}{cr+rr}.$$

Отсюда получим общее предложение денег

$$M = \frac{1+cr}{cr+rr}B.$$

Центральный банк может изменять предложение денег в стране, используя различные инструменты кредитно-денежной политики. Три основных инструмента:

- операции на открытом рынке;
- изменение ставки резервирования;
- изменение учетной ставки.

Операции на открытом рынке – это наиболее важное средство контроля предложения денег (покупка и продажа государственных ценных бумаг). Предположим, что правительство выпускает государственные облигации (эмиссия). Тогда коммерческие банки покупают государственные облигации, при этом Центральный банк уменьшает резервы коммерческих банков. Происходит отток денег с денежного рынка, M – уменьшается. Обратная ситуация: Центральный банк покупает у коммерческих банков и домашних хозяйств ценные бумаги. В этом резервы коммерческих банков возрастают на сумму покупки. Появляются избыточные резервы, часть из них выбрасывается на денежном рынке, следовательно, увеличивается предложение денег.

Изменение резервной системы. Если Центральный банк увеличивает норму резервирования, тогда совокупное предложение денег в экономике сокращается, т.к. у коммерческого банка сокращается объем кредитования. Если норма обязательных резервов уменьшается, то в соответствии с формулой денежного мультипликатора, предложение денег в стране растет.

Учетная ставка – это ставка процента по кредитам, выдаваемым Центральным банком коммерческим банкам. Давая ссуду, Центральный банк увеличивает резервы банка-заемщика. Если процент по ссуде увеличивается, тогда кредитные возможности коммерческого банка уменьшаются, и предложение денег сокращается. Обратная ситуация: уменьшение учетной ставки вызывает увеличение денежного предложения.

Пример 5. Предположим, что соотношение резервов и депозитов составляет 0,2, а соотношение наличных средств и депозитов равно 0,25.

а) какова величина денежного мультипликатора;

б) Центробанк решает увеличить предложение денег на 200 млн. долларов путем операции на отрытом рынке. на какую сумму он должен закупить облигации?

Решение: *а*) ден. мульт. = $\dfrac{1+cr}{rr+cr}$, cr = 0,25; rr = 0,2;

$$\text{ден. мульт.} = \frac{1+0{,}25}{0{,}2+0{,}25} = 2{,}78.$$

б) $\Delta M^s = \dfrac{1+cr}{rr+cr}\Delta B$, $B = C + R$ – денежная база.

При покупке Центробанком облигаций увеличивается R

$$\Delta B = \Delta R = \Delta M^s \frac{rr+cr}{1+cr} = \frac{200}{2{,}78} = 72,$$

т.е. Центробанк должен закупить облигации на 72 млн. долларов.

6.4. Модель Баумоля-Тобина

Это – модель оптимального управления денежной наличностью. Предпосылки:

- считаем, что домашние хозяйства живут только на сбережения;
- уровень цен постоянен P = const;
- T – время, в течении которого тратится данная наличность;
- объем потребления – есть параметр C в течении промежутка времени T;
- если год равен единице, то частота, с которой домашние хозяйства ходят в банк, $1/T$;
- γ – трансакционные издержки, которые включают в себя различные траты на походы в банк. Тогда реальные трансакционные издержки γ/P;
- $\frac{\gamma}{m}\frac{1}{T}$ – издержки на одну трансакцию;
- $PCT = m$ – объем наличности, необходимый домашним хозяйствам для обеспечения его потребления в течении периода T.

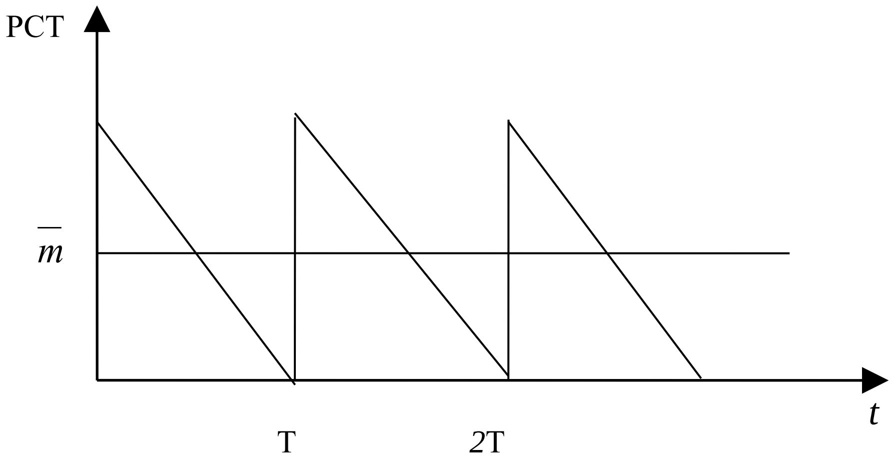


Рис. 6.6. Пилообразная модель

Среднее количество денег (среднеинтервальное значение денег, которое необходимо домашним хозяйствам)

$$\overline{m} = \frac{1}{2} PCT .$$

В реальном выражении среднее количество денег необходимое домашним хозяйствам:

$$\frac{\overline{m}}{P} = \frac{1}{2} CT .$$

Считаем, что деньги могли бы принести доход в виде ставки процента. Тогда издержки недополучения процента в результате использования данной политики:

$$\frac{r\overline{m}}{P} = \frac{1}{2}CTr .$$

Зная чему равны трансакционные издержки, получим формулу для общих издержек связанных с наличностью на руках:

$$TC = \frac{1}{2}CTr + \frac{\gamma}{P}\frac{1}{T}.$$

Для минимизации издержек дифференцируем их по T и приравниваем производную к нулю.

$$\frac{1}{2}Cr - \frac{\gamma}{P}\frac{1}{T^2} = 0 .$$

Отсюда $T_{opt} = \sqrt{\frac{2\gamma}{rPC}}$. Оптимальное количество денежной массы $\overline{m}_{opt} = \sqrt{\frac{\gamma C}{2rP}}$.

Вся модель выглядит следующим образом (рис. 6.7):

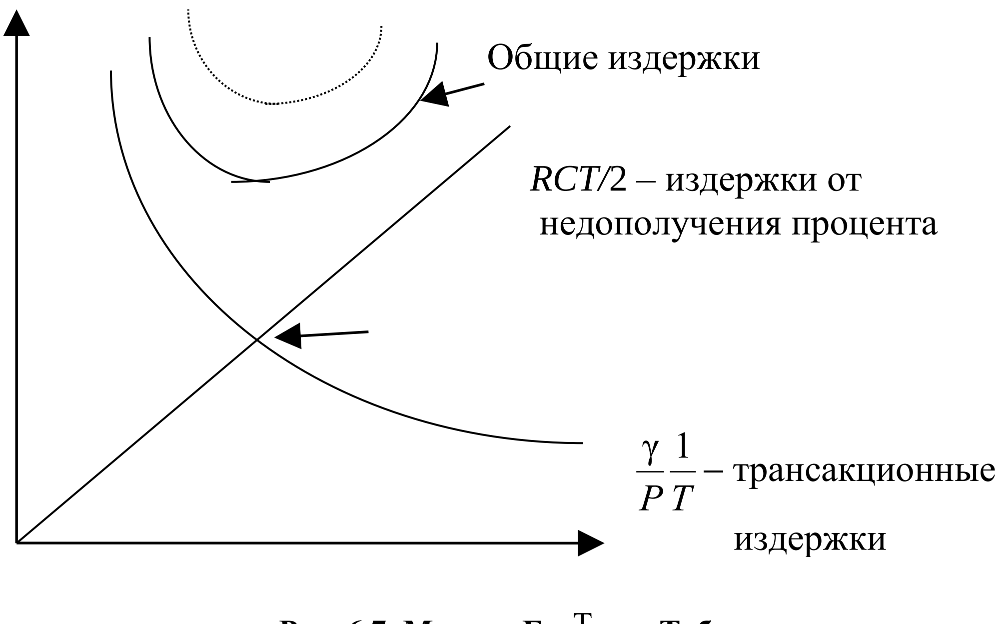


Рис. 6.7. Модель Баумоля-Тобина

При росте r общие издержки смещаются вверх (пунктир)

Пример 6. Индивид каждый месяц зарабатывает 1000 долларов. Издержки однократного обращения в банк и оформления снятия денег со счета равны 2 доллара. Номинальная процентная ставка по облигациям 10%.

а) Используйте модель Баумоля-Тобина для вычисления оптимальных средних денежных остатков в течении месяца;

б) Сколько раз в месяц индивид будет обращаться в банк?

в) Как изменятся ответы, если издержки одного обращения в банк увеличатся до 3,125 доллара?

г) если процентная ставка возрастет до 14,4%?

Решение: а) в нашем случае $Y = 1000$; $\gamma/p = 2$; $r = 0{,}1$, тогда $\overline{m}_{opt} = \sqrt{\frac{\gamma Y}{2rP}} = \sqrt{\frac{2000}{2 \times 0.1}} = 100$ дол.;

б) $T_{opt} = \sqrt{\frac{2\gamma}{rPY}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{0{,}1 \times 1000}} = 0{,}2$, k_{opt}=1/0,2 =5 раз;

в) при γ/P = 3,125 имеем

$$\overline{m}_{opt} = \sqrt{\frac{1000 \times 3{,}125}{2 \times 0{,}1}} = \sqrt{6400} = 125 \text{ дол.}, \quad T_{opt} = \sqrt{\frac{2 \times 3{,}125}{1000 \times 0{,}1}} = \sqrt{0{,}0625} = 0{,}25,$$

$k_{opt} = 4$ раза.

г) при $r = 0{,}144$ имеем

$$m_{opt} = \sqrt{\frac{2000}{2 \times 0{,}144}} = \frac{100}{1{,}2} = 83{,}33 \text{ дол.}, \quad T_{opt} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{0{,}144 \times 1000}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \ k_{opt} = 6 \text{ раз.}$$

6.5. Модель IS-LM

Кейнсианский крест и кривая IS.

Для определения равновесия на рынке благ необходимо знать функции совокупного спроса и совокупного предложения.

Графическое изображение равновесного состояния рынка благ приведено на рис.6.8.

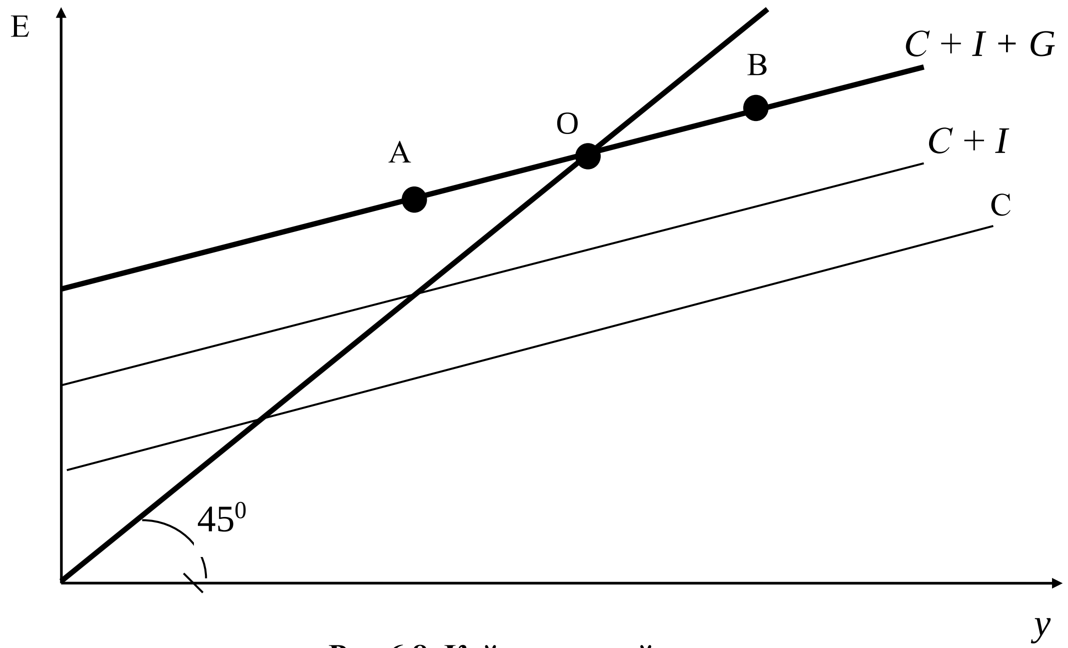


Рис.6.8. Кейнсианский крест

Здесь $E = C + I + G$ – планируемые расходы, кривая совокупного спроса; $NE = 0$, C – совокупное потребление, биссектриса – кривая совокупного предложения, тогда если совокупный спрос совпадает с совокупным предложением, то получаем ВНП по расходам (точка *O*).

В точке *A* спрос больше предложения, происходит сокращение товарно-материальных запасов, цены растут и этот разрыв – инфляционный. Совокупный спрос будет стремиться к равновесной точке и поведение экономических агентов будет определяться данным состоянием экономики.

В точке *B* совокупный выпуск больше совокупного спроса, происходит незапланированное увеличение товарно-материальных запасов, следовательно фирмы стремятся сократить производство, цены падают, получаем рецессионный разрыв. Экономика снова стремиться к равновесному состоянию.

Кривая *IS* – часть модели, которая является современной интерпретацией теории Кейнса. Построение кривой *IS* через кейнсианский крест показано на рис. 6.9.

Исходное состояние экономики определяется кривой совокупного спроса E_1. С ростом инвестиций переходим на новую кривую совокупного спроса E_2. Считаем постоянными уровни потребления и государственных расходов. С ростом инвестиций ставка процента падает. Поэтому кривая *IS*, построенная в плоскости $y - r$, имеет отрицательный наклон.

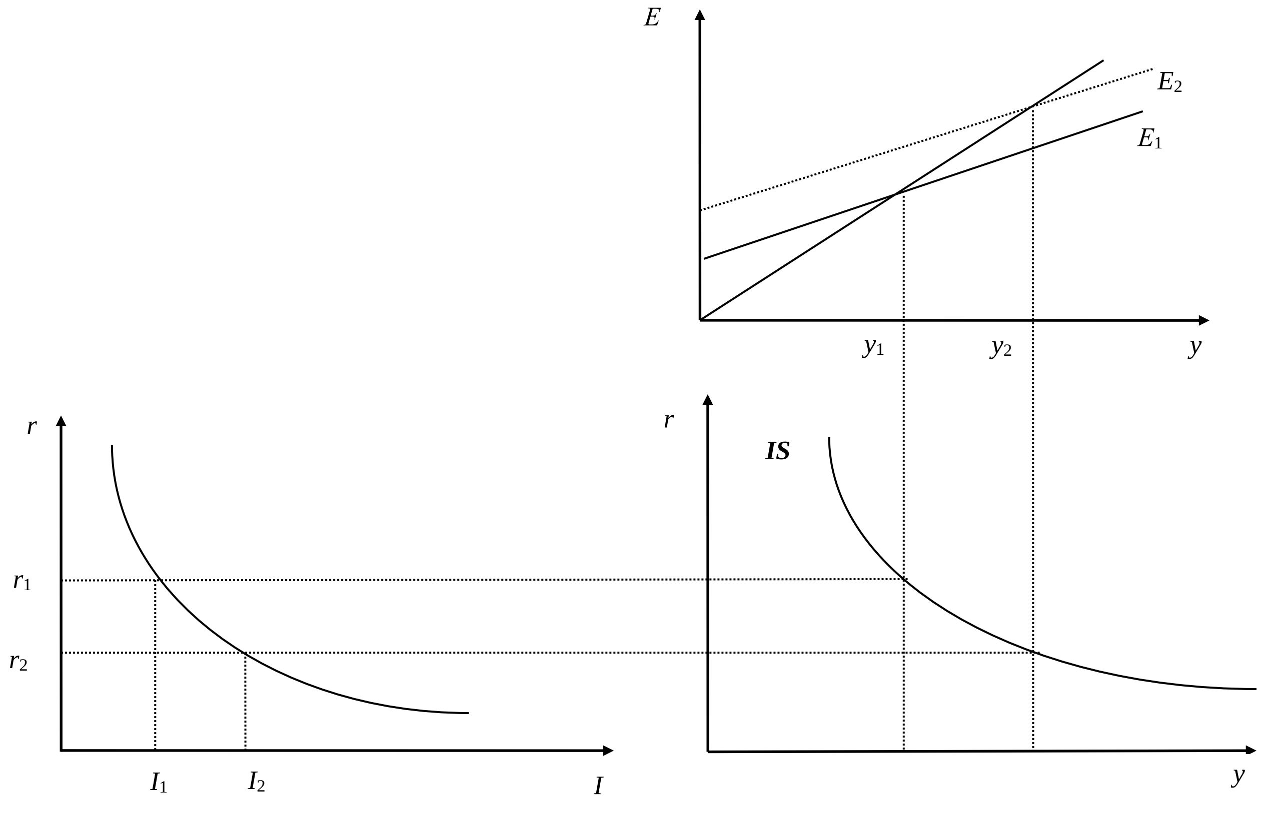


Рис. 6.9. Построение кривой *IS* через кейнсианский крест

Кривая *IS* собирает все равновесные точки и показывает, на сколько должна изменяться ставка процента при увеличении объема выпуска в экономике, и наоборот, на сколько должен измениться выпуск в экономике в случае падения или увеличении ставки процента. Кривая *IS* выводится при заданной бюджетно-налоговой политике. При изменении этих параметров кривая будет сдвигаться.

Условие равновесия на рынке благ имеет вид:

$$I(r) + G + Ex = T + S + \mathrm{Im}.$$

В левой части равенства записаны инъекции γ (притоки на рынок благ в дополнение к потребительскому спросу домашних хозяйств – инвестиционный спрос предпринимателей, спрос государства и заграницы). В правой части равенства записаны утечки ξ (оттоки из потенциального спроса на рынке благ вследствие того, что население часть своих доходов направляет на сбережение, уплату налогов и оплату импорта). В условиях равновесия утечки равны инъекциям: $\gamma = \xi$. Поскольку $S = s(y)$, $T = T(y)$, $\mathrm{Im} = \mathrm{Im}(y)$, $I = I(r)$, условие равновесия на рынке благ представляется уравнением $\xi(y) = \gamma(r)$.

Введем $T_y = \dfrac{T}{y}$; $S_y = \dfrac{S}{y}$; $\mathrm{Im}_y = \dfrac{\mathrm{Im}}{y}$.

Тогда алгебраический вид кривой *IS* можно получить из соотношения:

$$\xi_y y = I(r) + G + Ex,$$

где $\xi_y = T_y + S_y + \mathrm{Im}_y$; $I(r) = I_i(r^* - r)$; r^* – предельная эффективность капитала; I_i – предельная склонность к инвестированию.

Уравнение линии *IS* принимает следующий вид:

$$y = \frac{1}{\xi_y}(A - I_i r), \text{ где } A = I_i r^* + G + Ex.$$

Кривая LM

Равновесие на денежном рынке достигается тогда, когда все созданное банковской системой количество денег добровольно держится домашними хозяйствами в виде кассовых остатков и вкладов. Если есть равновесие на денежном рынке, то, зная, что M^s и M^d зависят от совокупного дохода (чем больше доход, тем больше M^s и M^d), просуммируем их $\Rightarrow$ получим кривую *LM*, которая показывает, что чем выше совокупный доход в экономике, тем выше равновесная процентная ставка на денежном рынке (рис. 6.10).

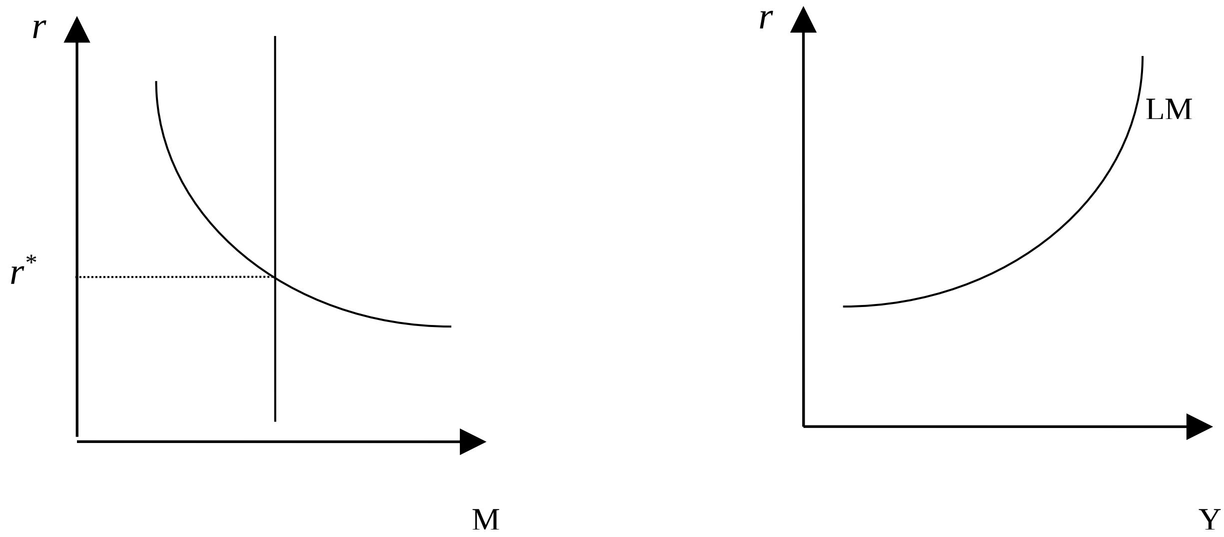


Рис. 6.10. Кривая *LM*

Совокупность всех комбинаций y и r, которые при заданном количестве денег обеспечивают равновесие на денежном рынке, образует кривую LM. Фактически эта кривая собирает все равновесные значения на денежном рынке и все равновесные значения на рынке ценных бумаг.

Алгебраический вид кривой LM выводится из уравнения равновесия на денежном рынке. В кейнсианской концепции это уравнение в явном виде записывается так:

$$M^S = PL_y y + PL_r(r_{\max} - r),$$

$$\text{или } \frac{M}{p} = L_y y - L_r r \, ,$$

где L_y и L_r – предельные склонности к предпочтению ликвидности для сделок и в качестве имущества соответственно, $M = M^S - L_r r_{\max}$, $r_{\max}$ – значение ставки процента, при котором облигации становятся столь привлекательны, что никто не желает иметь деньги в качестве имущества.

Совместное равновесие на рынках благ, денег и ценных бумаг

При достижении равновесия на рынке денег (кривая LM) одновременно устанавливается равновесие и на рынке ценных бумаг. Поэтому, для достижения равновесия на трех рынках необходимо просуммировать кривые IS и LM (рис. 6.11).

Здесь точка O – точка равновесия, y^* и r^* – равновесные значения выпуска и процентной ставки.

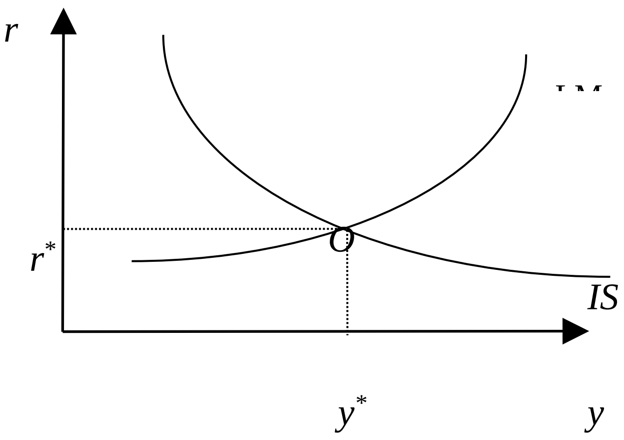


Рис. 6.11. Равновесие на трех рынках

Эти кривые разбивают плоскость на четыре квадранта (рис. 6.12).

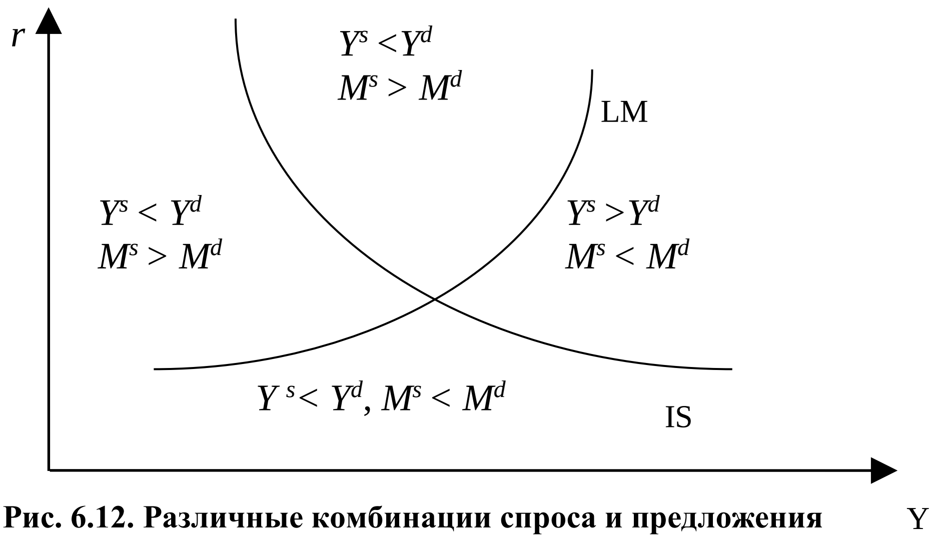


Рис. 6.12. Различные комбинации спроса и предложения

Таким образом, эта система – устойчивая равновесная система. Она сама стремится к равновесию в случае нарушения равновесных механизмов (шоков) на отдельных рынках. Рассмотрим движение экономики из неравновесных состояний в точку равновесия (рис. 6.13).

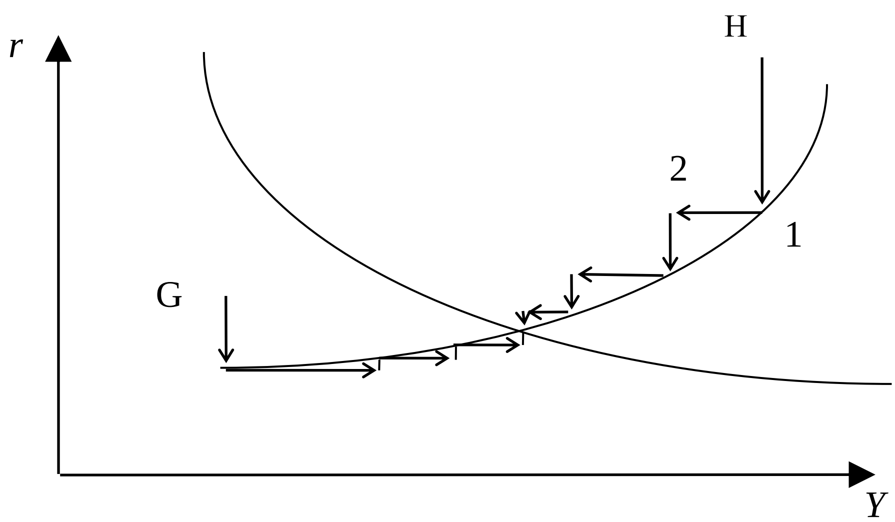


Рис. 6.13. Движение экономики в равновесное состояние

В точке H $Y^s > Y^d$, $M^s > M^d$ – избыток предложения. Анализ начинаем всегда с денежного рынка. Поскольку денежный рынок первым приходит в равновесие, ставка процента падает $\Rightarrow$ приходим на кривую *LM* (т. 1) $\Rightarrow$ увеличение I $\Rightarrow$ рост запасов $\Rightarrow$ сокращение производства и снижение дохода при данной ставке процента (т. 2). Далее процесс повторяется до тех пор, пока экономика не окажется в равновесии.

Аналогично происходит процесс перехода в равновесную точку из других квадрантов. Например, в точке G также имеется избыток предложения на денежном рынке $\Rightarrow$ уменьшение r $\Rightarrow$ приходим на кривую *LM*. Существующий дефицит на рынке благ при росте инвестиционной активности приводит к росту производства $\Rightarrow$ увеличение y. Возникает дефицит на рынке благ и ставка процента начинает расти. Далее процесс повторяется до достижения полного равновесия. Точно такие же цепочки можно провести и в двух других квадрантах.

Совместное равновесие является устойчивым при заданном уровне цен, при заданной бюджетно-налоговой и кредитно-денежной политике.

Сдвиги кривых *IS* и *LM* позволяют проанализировать переходы экономики из одного состояния в другое.

Решая совместно уравнения кривых *IS* и *LM*, можно найти уравнение кривой совокупного спроса.

Пример 7. Количество находящихся в обращении денег равно 24 ед., а спрос на деньги выражается формулой: $M^D = 1{,}5y - 100r$. Кроме того, известны функция потребления $C = 0{,}8y$ и функция инвестиций $I = 4 - 40r$. Составить уравнение функции совокупного спроса.

Решение:

Кривая LM: $\dfrac{M}{P} = 1{,}5y - 100r$;

Кривая IS: $y = C + I = 0{,}8y + 4 - 40r \Rightarrow 0{,}2y = 4 - 40r;\ r = 0{,}1 - 0{,}005y.$

Условие совместного равновесия:

$$\frac{M}{P} = 1{,}5y - 10 + 0{,}5y = 2y - 10; M = 24;$$

$$\frac{24}{P} = 2y - 10 \Rightarrow y^D(P) = 5 + \frac{12}{P}.$$

6.6. Динамическая модель инфляции

Инфляция – долговременный процесс роста цен (снижения покупательной способности денег).

Динамическая функция совокупного предложения без инфляционных ожиданий

Считаем, что ни предприниматели, ни домашние хозяйства не делают поправку на будущую инфляцию.

В 1958 г. профессор Лондонской школы экономики А. Филлипс опубликовал результаты своих исследований взаимосвязи между уровнем безработицы и изменением денежной ставки зарплаты в Великобритании в период с 1861 по 1957 г. Для первых 52 лет (1861-1913 гг.) эта зависимость аппроксимировалась уравнением:

$$\dot{w} = -0{,}9 + 9.683u^{-1{,}394} \tag{6.1}$$

где $\dot{w}$ – годовой темп прироста заработной платы, %; u – общий уровень безработицы, %. График этой зависимости, получивший название кривой Филлипса представлен на рис. 6.14.

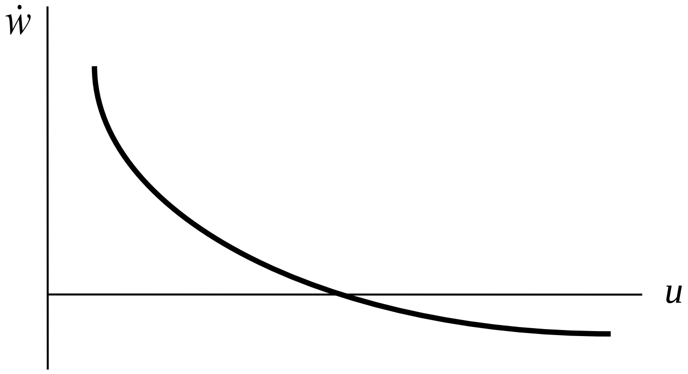


Рис. 6.14. Кривая Филлипса

Формально кривую Филлипса можно записать следующим образом:

$$\frac{w_t - w_{t-1}}{w_{t-1}} = -a\frac{N^* - N_t}{N^*}, \tag{6.2}$$

где w_t – ставка заработной платы в текущий период; w_{t-1} – ставка заработной платы в предыдущий период; N^* – равновесный уровень занятых при естественной безработице; N_t – фактический уровень занятых в текущий период; a – параметр, характеризующий изменение заработной платы в текущий период по сравнению с предыдущим в зависимости от уровня безработицы.

Отсюда видно, что при $N_t > N^*$ наблюдается «перегрев» в экономике – положительный темп прироста заработной платы. При $N_t = N^*$ темп прироста заработной платы равен нулю, $w_t = w_{t-1}$. Это наблюдается в период долгосрочного равновесия. Если $N_t < N^*$, то существует конъюнктурная безработица (безработные готовы предложить свой труд по любой цене), темп прироста заработной платы отрицательный.

Формулу (6.2) можно переписать в виде:

$$w_t = w_{t-1}\left(1 + a\frac{N_t - N^*}{N^*}\right). \tag{6.3}$$

В результате эмпирических наблюдений была получена формула:

$$u_t - u^* = -\frac{N_t - N^*}{N^*}, \tag{6.4}$$

где u_t – фактический уровень безработицы, u^* – естественный уровень безработицы.

Артур Оукен на основе эмпирических данных вывел одноименный закон: если фактический уровень безработицы превышает естественный на 1%, тогда отставание ВНП от потенциального уровня составляет γ% ($\gamma \cong 2{,}5$). Этот коэффициент γ называют коэффициентом Оукена. Зная его, можно подсчитать объем не выпущенной продукции. Формула Оукена:

$$u_t - u^* = \alpha(y^* - y_t), \text{где } \alpha = \frac{1}{\gamma\, y^*}, \tag{6.5}$$

y_t – текущий уровень выпуска; y^* – равновесный уровень выпуска; γ – параметр Оукена. Тогда имеем:

$$w_t = w_{t-1}\left[1 + \beta\left(y_t - y^*\right)\right], \tag{6.6}$$

где $\beta = a\alpha$ – параметр чувствительности текущей ставки заработной платы по отношению к изменениям в совокупном предложении.

Для получения функции совокупного предложения осталось выразить номинальную ставку заработной платы через уровень цен. В условиях несовершенной конкуренции, присущей современной экономике, наиболее распространенным способом установления цен является ценообразование по методу «затраты плюс», который представляется формулой:

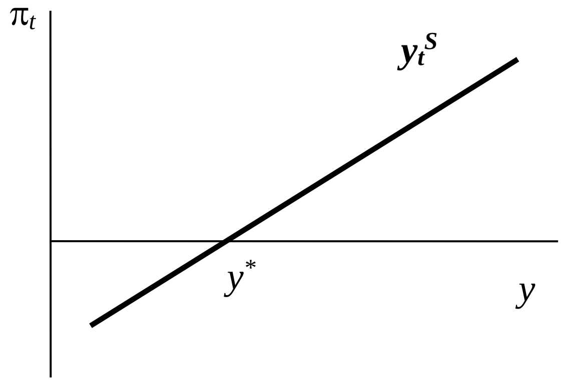
$$P_t = (1 + \lambda)\frac{N}{y}w_t, \tag{6.7}$$

где λ – коэффициент начисления на выплаченную зарплату в целях получения нормальной прибыли; N/y – трудоемкость единицы продукции.

Тогда $P_t = (1 + \lambda)\dfrac{N}{y}\, w_{t-1}\left[1 + \beta\left(y_t - y^*\right)\right]$; $P_t = (1 + \lambda)\dfrac{N}{y}\, w_{t-1}$,

$$\frac{p_t}{p_{t-1}} = 1 + \beta(y_t - y^*) \Rightarrow \quad \pi_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \beta(y_t - y^*).$$

Динамическая функция совокупного предложения в отсутствии инфляционных ожиданий имеет вид (рис. 6.15):



$$\boxed{y_t^S = y^* + \frac{\pi_t}{\beta}} \qquad (6.8)$$

Рис. 6.15. Динамическая функция совокупного предложения в отсутствии инфляционных ожиданий

Динамическая функция совокупного предложения с инфляционными ожиданиями

В зависимости от способа формирования инфляционных ожиданий, ожидания делятся на статические, адаптивные и рациональные.

Статические ожидания характеризуются тем, что ожидаемая цена будущих периодов, которые формируются в текущем периоде, равна цене текущего периода:

$$P_{t+1}^e = P_t.$$

Адаптивные ожидания предполагают, что домашние хозяйства учатся на своих ошибках, но они прогнозируют инфляцию только используя данные прошедших периодов.

$$P_{t+1}^e = P_t^e + \nu(P_t - P_t^e),$$

где ν – коэффициент адаптации, $0 < \nu < 1$; P_{t+1}^e – ожидаемая цена будущего периода, сформированная в текущем периоде; P_t – фактическая цена текущего периода; P_t^e – ожидаемая цена текущего периода, которая была сформирована в периоде t – 1; $P_t - P_t^e$ – ошибка при определении цены в период t – 1; $\nu(P_t - P_t^e)$ – поправка на данную ошибку.

Коэффициент ν определяет также скорость пересмотра ожиданий:

1. если ν мал, тогда инфляционные ожидания меняются медленно и реальный характер инфляции не оказывает на них никакого влияния;

2. если $\nu \to 1$, тогда инфляционные ожидания корректируются быстро в соответствии с реальной инфляцией;
3. если $\nu = 1$, тогда имеем концепцию статических ожиданий (прогнозируемая инфляция равна текущей).

Коэффициент ν – субъективный параметр для каждой фирмы и домашнего хозяйства.

Недостатком концепции адаптивных ожиданий является то, что используется только информация прошедших периодов. Второй недостаток: если темпы инфляции увеличиваются, то, как правило, ожидания субъектов отстают от реальных значений (есть временной лаг).

Рациональные ожидания. В соответствии с этой концепцией экономические агенты моделируют свое поведение, используя всю имеющуюся информацию предшествующего периода (вся информация о факторах, влияющая на определяемое значение параметров).

$$P_{t+1} = P_{t+1}(x_i),$$

где x_i – все ценообразующие факторы.

В реальной жизни используется смешанная концепция: концепция адаптивных ожиданий плюс концепция рациональных ожиданий.

В целях упрощения при построении модели совокупного спроса с инфляционными ожиданиями будем использовать концепцию адаптивных ожиданий, где коэффициент $\nu = 1$. Тогда при определении цены предложения труда домашние хозяйства будут учитывать ожидаемый темп инфляции. Темп прироста зарплаты корректируются на темп инфляции.

$$\frac{W_t - W_{t-1}}{W_{t-1}} = a\frac{N_t - N^e}{N^e} + \pi_t^e,$$

$$a\frac{N_t - N^*}{N^*} + \pi_t^e = \beta(y_t - y^*) + \pi_t^e.$$

Отсюда находим динамическую функцию совокупного предложения с инфляционными ожиданиями

$$y^S = y^* + \frac{1}{\beta}(\pi_t - \pi_t^e). \tag{6.9}$$

Динамическая функция совокупного спроса

Эта функция выводится из модели *IS-LM*.

Основные предпосылки:

- существуют заданный объем производства предыдущего периода y_{t-1};
- считаем заданными инфляционные ожидания;

- домашние хозяйства и фирмы делают поправку на ожидаемую инфляцию, тогда реальная ставка процента $r^{/} = r - \pi_t^e$. (r – номинальная ставка процента).

Уравнение кривой IS:

$$y = \frac{1}{\xi_y}(A - I_i r), \tag{6.10}$$

где $\xi_y = T_y + S_y + \mathrm{Im}_y$; $T_y = \frac{T}{y}$; $S_y = \frac{S}{y}$; $\mathrm{Im}_y = \frac{\mathrm{Im}}{y}$; $A = I_i r^* + G + Ex$; r^* – предельная эффективность капитала; I_i – предельная склонность к инвестированию.

Уравнение кривой LM:

$$\frac{M}{p} = L_y y - L_r r, \tag{6.11}$$

где L_y и L_r – предельные склонности к предпочтению ликвидности для сделок и в качестве имущества соответственно, $M = M^S - L_r r_{\max}$.

Решая совместно уравнения (12.10) и (12.11), получим:

$$y = aA + b\frac{M}{P} + c\pi_t^e, \text{ где } a = \frac{L_r}{\xi_y L_r + I_i L_y}; \quad b = \frac{I_i}{\xi_y L_r + I_i L_y}; \quad c = \frac{I_i L_r}{\xi_y L_r + I_i L_y}.$$

$$y_t - y_{t-1} = \Delta y_t = a\Delta A + h(\dot{M}_t - \pi_t) + c\Delta\pi_t^e; \quad \dot{M}_t = \frac{M_t - M_{t-1}}{M_{t-1}}; \quad h = b\frac{M_{t-1}}{P_t}.$$

Тогда получим уравнение для динамической функции совокупного спроса:

$$y_t^D = y_{t-1} + aA + h(\dot{M}_t - \pi_t) + c\Delta\pi_t^e. \tag{6.12}$$

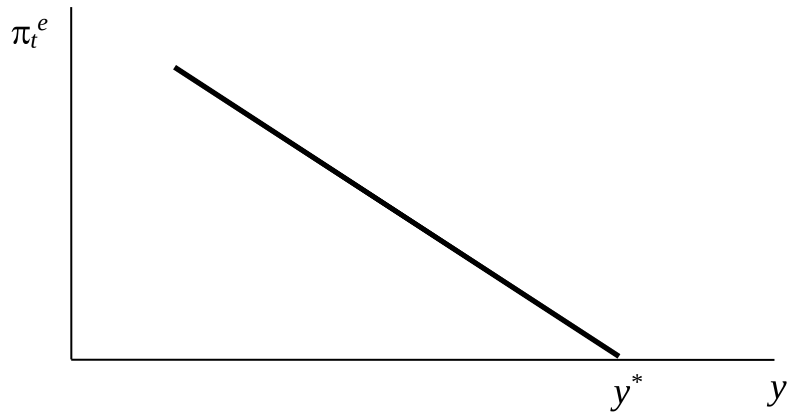


Рис. 6.16. Динамическая функция совокупного спроса

Монетарный импульс

Пусть в исходный момент времени экономика находится в состоянии общего экономического равновесия в условиях полной занятости:

$$y_0 = y^*; \quad \Delta A_0 = 0; \quad \Delta M_0 = 0; \quad \pi_0^e = 0.$$

В каждый дискретный момент времени существует равенство совокупного спроса и совокупного предложения (экономика находится в равновесии). Пусть, начиная с первого периода, в экономике увеличивается предложение денежной массы ($\dot{M} > 0$). В этом случае происходит динамический процесс развития инфляции. В каждый момент времени меняется темп инфляции и уровень выпуска.

Для того, чтобы проанализировать процесс перехода к новому устойчивому состоянию, рассмотрим факторы, которые определяют направление движения к равновесию (рис. 6.17):

- если $\pi_t < \dot{M}$, то совокупный выпуск растет, если $\pi_t > \dot{M}$, совокупный выпуск падает, стремясь к равновесному уровню;
- если текущий выпуск меньше равновесного, то темп инфляции меньше нуля, если выпуск больше равновесного, то темп инфляции больше нуля, инфляция увеличивается.

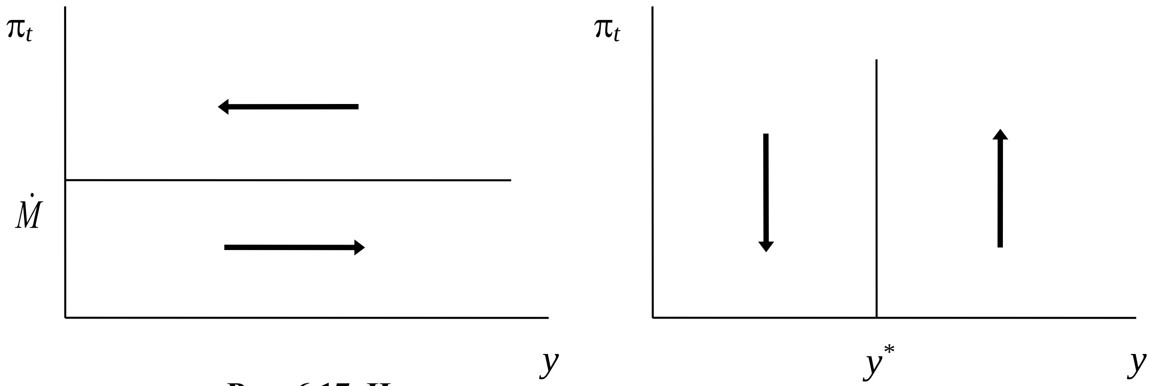


Рис. 6.17. Направления движения к равновесию

Складывая вектора, получим направление движения инфляции в каждый момент времени (рис. 6.18).

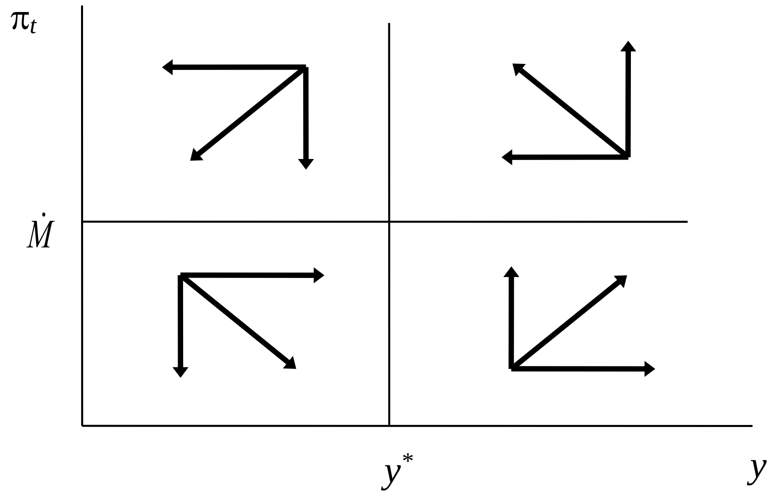


Рис. 6.18. Направления движения инфляции

Таким образом, в результате монетарного импульса (выброса дополнительного количества денежной массы) инфляция развивается по спирали. Экономика приходит к новому равновесному состоянию, в котором темп инфляции равен первоначальному изменению денежной массы (рис. 6.19).

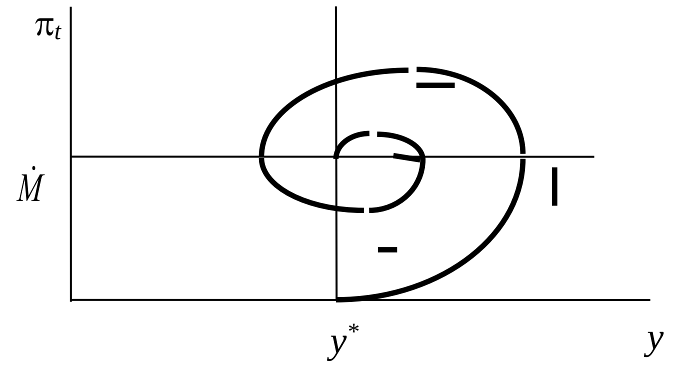


Рис. 6.20. Развитие инфляции при монетарном импульсе

Рассмотрим числовой пример монетарного импульса.

Пример 8. Пусть динамическая функция совокупного предложения с инфляционными ожиданиями имеет вид:

$$y_t^S = 80 + 320\pi_t - 320\pi_t^e,$$

а динамическая функция совокупного спроса имеет вид:

$$y_t^D = y_{t-1} + 3{,}75\Delta\pi_t^e + 60\dot{M}_t - 60\pi_t.$$

В начальный момент $y_0^S = 80 + 320\pi_0$; $y_0^D = 80 - 60\pi_0$. Начиная с периода t_1 предложение денег растет с темпом $\dot{M} = 0{,}2$ при неизменной фискальной политике ($\Delta A_t = 0$).

<u>Первый период</u>: линия y^D сдвигается вправо, y^S – не измениться:

$$\begin{cases} y_1^D = 80 + 60 \times 0{,}2 - 60\pi_1, \\ y_1^S = 80 + 320\pi_1 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = 0{,}032;\ y_1 = 90{,}1.$$

<u>Второй период</u>: линия y^D еще сдвигается вправо под влиянием двух факторов: прироста дохода $(y_1 - y_0) = 10{,}1$ и прироста инфляционных ожиданий $(\pi_1^e - \pi_0^e = 0{,}032)$; линия y^S сдвинется влево из-за $\pi_2^e = \pi_1 > 0$:

$$\begin{cases} y_2^D = 90{,}1 + 3{,}75 \times 0{,}032 + 60 \times 0{,}2 - 60\pi_2, \\ y_2^S = 80 + 320\pi_2 - 320 \times 0{,}032 \end{cases} \Rightarrow \pi_2 = 0{,}1;\ y_2 = 102{,}2.$$

<u>Третий период:</u>

$$\begin{cases} y_3^D = 102{,}2 + 3{,}75 \times (0{,}1 - 0{,}032) + 60 \times 0{,}2 - 60\pi_3, \\ y_3^S = 80 + 320\pi_3 - 320 \times 0{,}1 \end{cases} \Rightarrow \pi_3 = 0{,}175;\ y_3 = 104{,}0$$

и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баканов М.И.** Теория экономического анализа: Учебник. 4-е изд. доп. и перераб. – М.: Финансы и статистика, 2011. 416 с.
2. **Букан Дж., Кенигсберг Э.** Научное управление запасами. – М.: Наука, 1967. 424 с.
3. **Вагнер Г.** Основы исследования операций в 3-х томах. – М.: Мир, 1973.
4. **Ван Хорн Дж.К.** Основы управления финансами: Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 2005. -800с.
5. **Гальперин В.М. и др.** Макроэкономика: Учебник, 9-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2012. — 686 с. — Серия : Бакалавр. Углуб- ленный курс
6. **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. Изд.8-е, стер. – М.: Высш. шк., 2003. 479 с.
7. **Дорнбуш Р., Фишер С.** Макроэкономика. – М.: Изд-во МГУ: ИНФРА-М, 1997. 782 с.
8. **Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.** Математические методы в экономике: Учебник. – М.: Дело и Сервис, 2011. – 368 с.
9. **Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И.** Математические методы и модели в планировании. – М.: Экономика, 1977. 240 с.
10. **Ковалев В.В.** Финансовый менеджмент: теория и практика. – М.: Проспект, 2007. 1024 с.
11. **Козырев О.Р., Куркин А.А., Максимов А.Г., Митяков С.Н.** Теория обработки экономической информации: Учеб. пособие. – Н. Новгород: НГТУ, 2000. 178 с.
12. **Козырев О.Р., Куркин А.А., Куркина И.В., Митяков С.Н., Митякова О.И.** Информационная поддержка системы принятия решений: Монография. – Н. Новгород: НГТУ, 2001. 136 с.
13. **Липсиц И.В.** Ценообразование: Учебно-практическое пособие. – М.: Издательство Юрайт, 2011. 399 с.
14. **Мазин А.Л.** Лекции по микроэкономике. – Н. Новгород: НИМБ, 1998.

15. **Нуреев Р.М.** Курс микроэкономики. Учебник для ВУЗов. – М.: Микроэкономика лекции- М, 2005.- 576 с.

16. **Радионов Н.В., Радионова С.П.** Основы финансового анализа: математические методы, системный подход. – СПб.: Альфа, 1999. 599 с.

17. **Рейклейтис Г., Рейвиндран А., Рагодел К.** Оптимизация в технике: В 2 т. – М.: Мир, 1983. Т. 1,2.

18. **Сакс Д., Ларрен Ф.** Макроэкономика. Глобальный подход. – М.: Дело, 1996, 847 с.

19. **Томас Р.** Количественные методы анализа хозяйственной деятельности: Пер. с англ. – М.: Дело и сервис, 1999. 432 с.

20. **Фомин Г.П.** Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.

21. **Химмерльблау Д.М.** Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975.

22. **Четыркин Е.М.** Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело Лтд, 2004. 320 с.

23. **Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж.** Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА - М, 1997. 1024 с.

24. **Шеремет А.Д., Негашев Е.В.** Методика финансового анализа деятельности коммерческих организаций. – М.: ИНФРА - М, 2013. 208 с.

25. **Шмидт Р., Райт Х.** Финансовые аспекты маркетинга: Учеб. пособие для вузов: Пер. с англ. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. 527 с.

26. **Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.** Линейное программирование. Теория, методы и приложения. – М.: Наука, 1969. 424 с.